

APROXIMACE KŘOVÁKOVA ZOBRAZENÍ PRO GEOGRAFICKÉ ÚČELY

Radek Dušek, Jan Mach

Katedra fyzické geografie a geoekologie, Přírodovědecká fakulta, Ostravská univerzita, Ostrava
Gymnázium Omská, Praha

Abstrakt

Křovákovo zobrazení je kartografickým základem národního geodetického souřadnicového systému, který často v rámci geoinformačních technologií (GIS, GPS) není podporován vůbec nebo je podporován problematicky. Příspěvek se zabývá možnostmi nahrazení Křovákova zobrazení jinými, podporovanými zobrazeními. Omezení se na geografické účely umožnilo využívat pouze pravá zobrazení a podobnostní transformaci, tedy standardní součásti softwarových produktů pracujících s geografickými daty.

1 Křovákovo zobrazení

Křovákovo zobrazení bylo navrženo po vzniku Československé republiky tak, aby co nejlépe vystihovalo její tehdejší tvar (tedy vč. Podkarpatké Rusi) a poskytovalo co nejmenší zkreslení na celém území státu. I přes značné rozdíly v rozsahu a tvaru státního území je Křovákovo zobrazení kartografickým základem i pro současný geodetický souřadnicový systém České republiky (S-JTSK).

Z hlediska matematické kartografie se jedná o dvojité konformní kuželové zobrazení v obecné poloze. Postupně se zobrazuje nejdříve konformně Besselův elipsoid na kulovou plochu, a ta je následně konformně zobrazena na kuželovou plochu, která je obecně položená. Při výpočtu rovinných souřadnic ze souřadnic zeměpisných se tedy využívá dvou zobrazení a dvou transformací. Podrobněji o zobrazení např. v [1, 2, 3].

V celosvětovém měřítku je užívání konformního kuželového zobrazení v obecné poloze – Oblique Conformal Conic (OOC) projection – raritou. Na světě neexistuje (kromě slovenské státní souřadnicové sítě, která je stejného původu) jiná státní souřadnicová síť založená na OOC zobrazení. Kvůli této jedinečnosti obsahují softwary GIS buď Křovákovo zobrazení, nebo nemají žádné parametrizované OOC zobrazení. V druhém případě neexistuje možnost nadefinování S-JTSK v softwarech GIS.

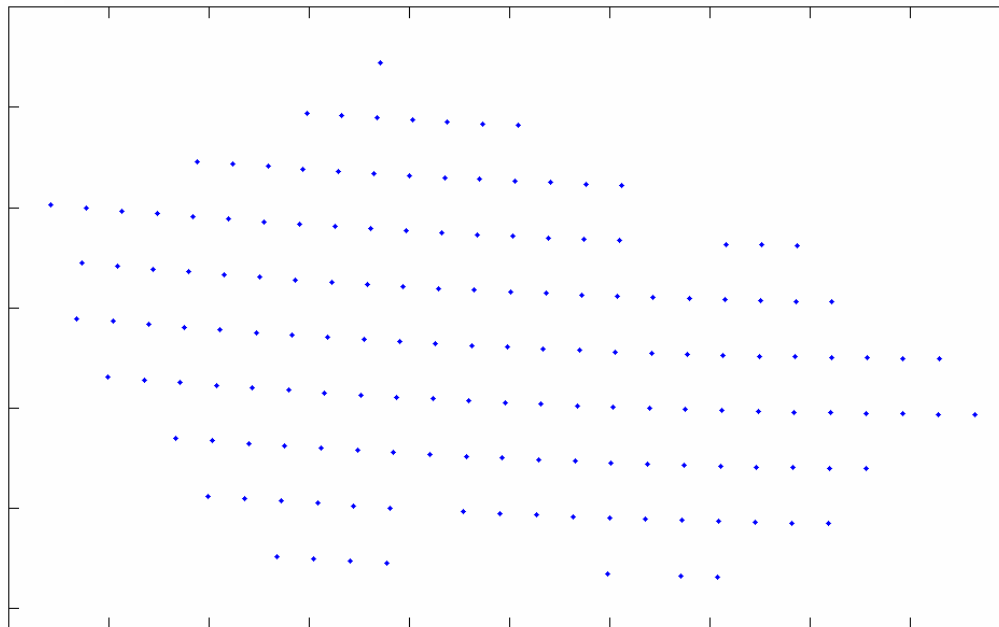
2 Náhradní zobrazení

Aby bylo možné zobrazení nadefinovat do softwaru GIS nebo přístroje GPS, je třeba, aby náhradní zobrazení bylo v rámci těchto aplikací podporováno. Musí se tedy jednat o běžně užívané zobrazení. Tuto podmínku splňují pravá (jednoduchá) zobrazení, zejména azimutální a kuželová v normální poloze a válcová v normální a příčné poloze. Vzhledem k tomu, že Křovákovo zobrazení je konformní, bylo náhradní zobrazení hledáno zejména mezi konformními zobrazeními a byla vybrána dvě: kuželové konformní zobrazení v normální poloze, jehož autorství je připisováno Lambertovi, a Gaussovo válcové konformní zobrazení v příčné poloze. Jako třetí zobrazení bylo zvoleno kuželové zobrazení ekvidistantní v polednicích, které poprvé použil Ptolemaios. Vzhledem k tomu, že jednotlivá zobrazení mají různé parametry a mohou být aplikována na různé elipsoidy, znamenalo nalezení nejlepší aproximace nejen výběr zobrazení, ale také optimalizaci parametrů zobrazení i elipsoidu.

Rovinné souřadnicové sítě zvolených náhradních zobrazení v normální a příčné poloze nemohou vystihnout S-JTSK bez dodatečné úpravy souřadnic. Omezení se pouze na geografické aplikace umožnilo pracovat s přesností řádově několik metrů a tím pro úpravu souřadnic využít pouze rovinnou podobnostní transformaci, která je standardní funkcí všech softwarových produktů pracujících s geografickými daty.

3 Postup aproximace

Aproximace byla řešena pro pravidelnou síť referenčních bodů, v nichž byla sledována shoda Křovákova zobrazení a náhradního zobrazení. Jako soubor referenčních bodů byly zvoleny průsečíky rovnoběžek a poledníků s krokem 15' a výsledkem se stal soubor 157 bodů, viz obr. 1 (oproti podobnému postupu použitého v [4] byla použita čtyřikrát hustší síť).



Obr. 1 Síť referenčních bodů

Pro jednotlivá zobrazení a jejich parametry byly vypočteny rovinné souřadnice referenčních bodů a ty potom byly transformovány na stejné body v S-JTSK. Po vyřešení transformace pomocí referenčních bodů byly dále iterační metodou hledány v okolí nalezených identických bodů optimální identické body s přesností 1'. Pro zpřesnění průběhu odchylek mezi zobrazeními bylo 157 referenčních bodů rozšířeno o 2 597 hraničních bodů České republiky a dalších cca 10 000 bodů rozmístěných v pravidelné síti uvnitř hranic ČR. Nalezení nejlepší aproximace tak znamenalo minimalizaci odchylek na těchto téměř 13 000 bodů.

Náhrada Křovákova zobrazení je tedy dána:

- a) zobrazením,
- b) parametry zobrazení,
- c) parametry elipsoidu,
- d) parametry transformace.

Praktický postup hledání nejlepší náhrady probíhal v prostředí MATLAB a spočíval ve vytvoření několika M-souborů, které byly postupně využívány. Vytvořeny byly čtyři samostatné soubory pro řešení zobrazovacích rovnic jednotlivých zobrazení (včetně Křovákova) a dále pro jednotlivá náhradní zobrazení soubory pro transformaci referenčních bodů a pro výpočet a znázornění výsledných odchylek. Pro každé zobrazení byly jednotlivé soubory používány v cyklech při kterých docházelo ke změnám parametrů a hledala se minimální hodnota maximální odchylky na uvedených cca 13 000 bodech. Tak byly stanoveny optimální parametry jednotlivých zobrazení a následně vybráno nejlepší zobrazení.

4 Lambertovo kuželové konformní zobrazení v normální poloze

Zobrazení se svými vlastnostmi (kuželové, konformní) nejvíce blíží Křovákovu zobrazení. V celosvětovém měřítku patří v rámci národních systémů k často používaným.

Zobrazení je definováno rovnicemi pro výpočet polárních souřadnic:

$$\rho = \rho_0 \left[\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi_0}{2} + 45^\circ\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2} + 45^\circ\right)} \right]^n \cdot \left[\frac{(1 - e \sin \varphi_0)(1 + e \sin \varphi)}{(1 + e \sin \varphi_0)(1 - e \sin \varphi)} \right]^{\frac{ne}{2}}, \quad \varepsilon = n\lambda,$$

kde ρ_0 a n jsou parametry zobrazení.

Náhradní Lambertovo konformní kuželové zobrazení má tyto parametry:

$$e^2 = 0,006\,687\,34,$$

$$\rho_0 = 5\,376\,979,177 \text{ m},$$

$$n = 0,761\,735\,92,$$

$$\lambda_0 = 19^\circ 00',$$

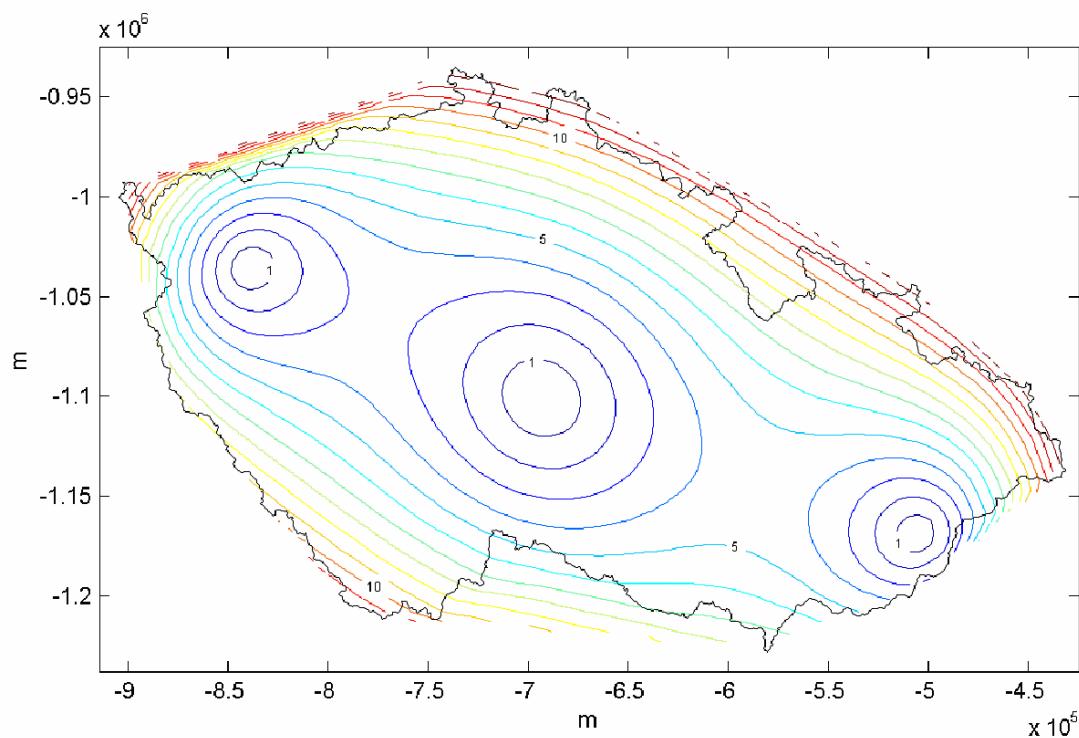
$$k = 1,008\,170\,6683,$$

$$\Delta x = 408\,385,7379 \text{ m},$$

$$\Delta y = -4\,286\,010,9633 \text{ m},$$

$$\delta = -4^\circ 13' 12,9690'',$$

kde e je excentricita referenčního elipsoidu, ρ_0 a n jsou konstanty zobrazovacích rovnic a λ_0 je zeměpisná délka základního poledníku. Transformační klíč podobnostní transformace definují hodnoty



Obr. 2 Průběh polohových odchylek Lambertova zobrazení od Křovákova zobrazení (hodnoty izolinií v metrech)

k , Δx , Δy a δ ; k je měřítko transformace (koeficient zvětšení), Δx je posun ve směru osy x , Δy je posun ve směru osy y a δ je velikost úhlu pootočení.

Výsledek nahrazení Lambertovým zobrazením je charakterizován maximální hodnotou polohové odchylky, která je na okraji republiky 14,54 m. Průběh odchylek v rámci celého území ČR je pomocí izolinií zachycen na obrázku 2.

5 Gaussovo konformní válcové zobrazení v příčné poloze

Zobrazení je konformní, ale na rozdíl od Křovákova zobrazení je válcové. Jedná se o druhé zobrazení používané v ČR (pro vojenské mapy) a celosvětově jedno z neužívanějších.

Zobrazovací rovnice mají tvar:

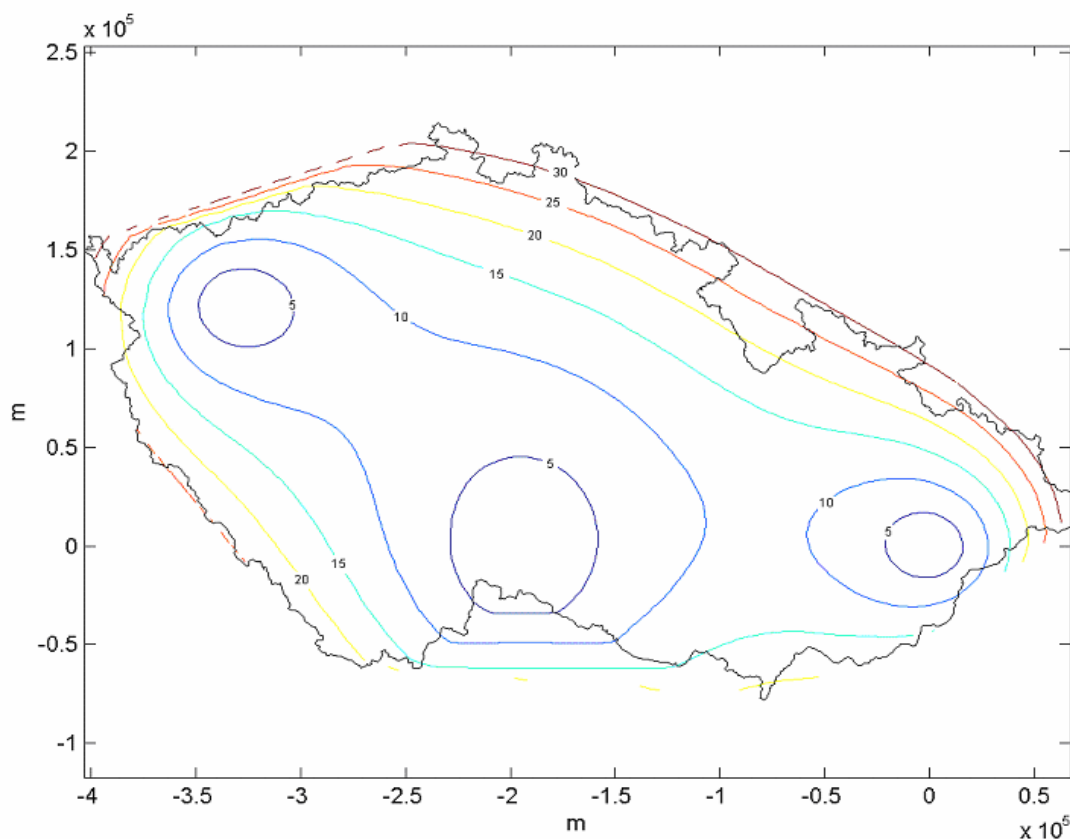
$$X = B + \frac{\lambda^2 N}{2\rho^2} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{\lambda^4 N}{24\rho^4} \sin \varphi \cos^3 \varphi (5 - \operatorname{tg}^2 \varphi + 9\eta^2 + 4\eta^4) +$$

$$+ \frac{\lambda^6 N}{720\rho^6} \sin \varphi \cos^5 \varphi (61 - 58 \operatorname{tg}^2 \varphi + \operatorname{tg}^4 \varphi + 270\eta^2 - 330\eta^2 \operatorname{tg}^2 \varphi) + \dots,$$

$$Y = \lambda \frac{N}{\rho} \cos \varphi + \frac{\lambda^3 N}{6\rho^3} \cos^3 \varphi (1 - \operatorname{tg}^2 \varphi + \eta^2) +$$

$$+ \frac{\lambda^5 N}{120\rho^5} \cos^5 \varphi (5 - 18 \operatorname{tg}^2 \varphi + \operatorname{tg}^4 \varphi + 14\eta^2 - 58\eta^2 \operatorname{tg}^2 \varphi) + \dots,$$

kde φ je zeměpisná šířka, λ zeměpisná délka, redukováná k zeměpisné délce základního poledníku, ρ je radián, η je dáno vztahem $\eta = \frac{e^2 \cos^2 \varphi}{1 - e^2}$, M je poledníkový a N příčný poloměr křivosti



Obr. 3 Průběh polohových odchylek Gaussova zobrazení od Křovákova zobrazení (hodnoty izolinií v metrech)

elipsoidu a B je délka poledníkového oblouku měřená od rovníku k zeměpisné šířce φ .

Náhradní Gaussovo konformní transversální válcové zobrazení má následující parametry:

$$e^2 = 0,006\,614\,220,$$

$$a = 6\,377\,397,155\text{ m},$$

$$\lambda_0 = 15^\circ 17' 0,3821'',$$

$$k = 0,999\,804\,4844,$$

$$\Delta x = 658\,465,7006\text{ m},$$

$$\Delta y = -4\,427\,269,0659\text{ m},$$

$$\delta = 172^\circ 57' 8,4309'',$$

kde e je excentricita referenčního elipsoidu, a je velikost hlavní poloosy elipsoidu, λ_0 je zeměpisná délka základního poledníku a parametry transformace mají stejný význam jako u předchozího zobrazení.

Při optimálním nahrazení Gaussovým zobrazením bylo dosaženo polohové odchylky 31,23 m. Průběh odchylek na území republiky je zachycen na obr. 3.

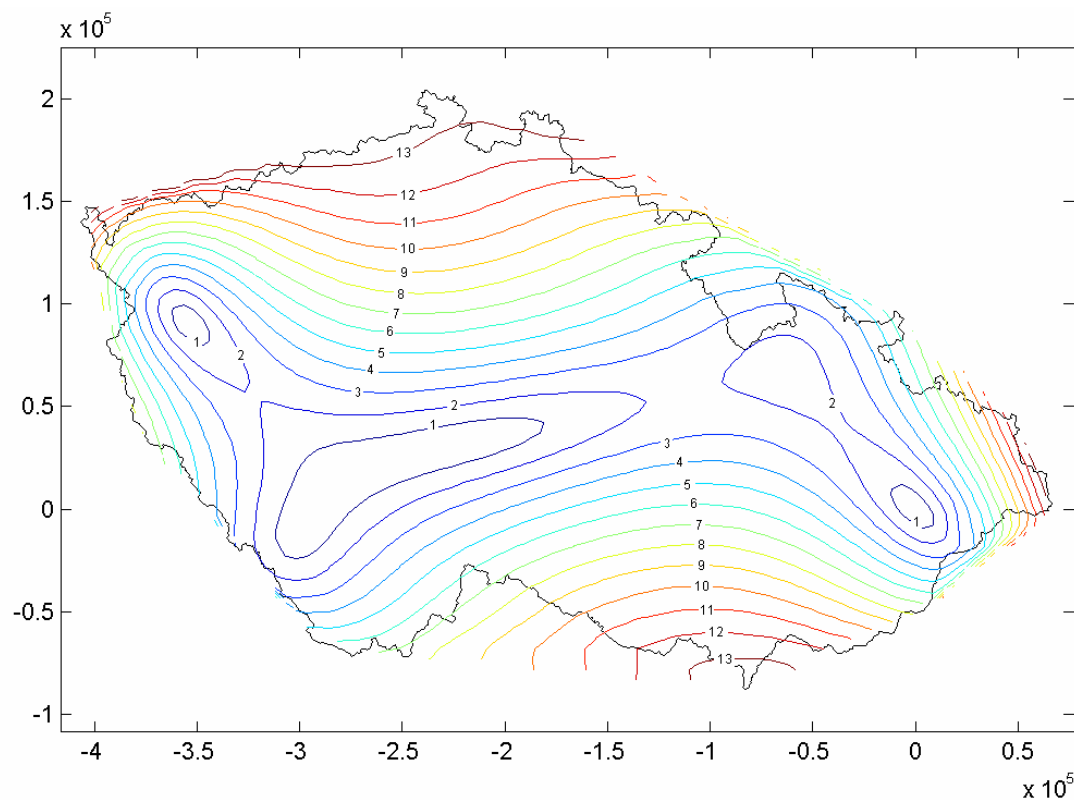
6 Ptolemaiovo kuželové zobrazení ekvidistantní v polednicích

Zobrazení patří mezi jedno z nejstarších, má vyrovnávací charakter. V národních systémech není užíváno, neboť pro tyto účely jsou upřednostňována konformní zobrazení.

Zobrazovací rovnice jsou:

$$\rho = \rho_0 - s_{\varphi_0}^{\varphi}, \quad \varepsilon = n\lambda,$$

kde ρ_0 je délka poledníkového oblouku měřeného od rovníku po základní rovnoběžku φ_0 a $s_{\varphi_0}^{\varphi}$ je



Obr. 4 Průběh polohových odchylek Ptolemaiova zobrazení od Křovákova zobrazení (hodnoty izolinií v metrech)

délka poledníkového oblouku od základní rovnoběžky φ_0 až k zeměpisné šířce φ ; při $\varphi > \varphi_0$ je uvažována kladně v opačném případě záporně.

Obě konstanty zobrazení ρ_0 a n jsou závislé na zeměpisných šířkách nezkreslených rovnoběžek φ_1 a φ_2 , které jsou pro zobrazení nezávislými parametry:

$$n = \frac{N_1 \cos \varphi_1 - N_2 \cos \varphi_2}{s_{\varphi_1}^{\varphi_2}} \quad \text{a} \quad \rho_0 = \frac{s_{\varphi_0}^{\varphi_2} N_1 \cos \varphi_1 - s_{\varphi_0}^{\varphi_1} N_2 \cos \varphi_2}{N_1 \cos \varphi_1 - N_2 \cos \varphi_2},$$

kde N_1 a N_2 jsou hlavní poloměry křivosti elipsoidu v rovnoběžkovém směru na nezkreslených rovnoběžkách φ_1 a φ_2 .

Náhradní Ptolemaiovo zobrazení má tyto parametry:

$$e^2 = 0,006\,680\,63,$$

$$a = 6\,377\,397,155 \text{ m},$$

$$\varphi_1 = 48^\circ 49' 42,5892'',$$

$$\varphi_2 = 50^\circ 24' 21,42'',$$

$$\lambda_0 = 19^\circ 00',$$

$$k = 1,000\,005\,9690,$$

$$\Delta x = 410\,572,9067 \text{ m},$$

$$\Delta y = -4\,320\,337,8603 \text{ m},$$

$$\delta = 4^\circ 13' 10,1328'',$$

kde e je excentricita a a velikost hlavní poloosy elipsoidu, φ_1 a φ_2 jsou zeměpisné šířky nezkreslených rovnoběžek, k , Δx , Δy a δ jsou opět parametry transformace.

Maximální polohová odchylka při aproximaci pomocí Ptolemaiova zobrazení je 13,75 metrů. Průběh polohových odchylek zachycuje obrázek 4.

7 Zhodnocení náhradních zobrazení

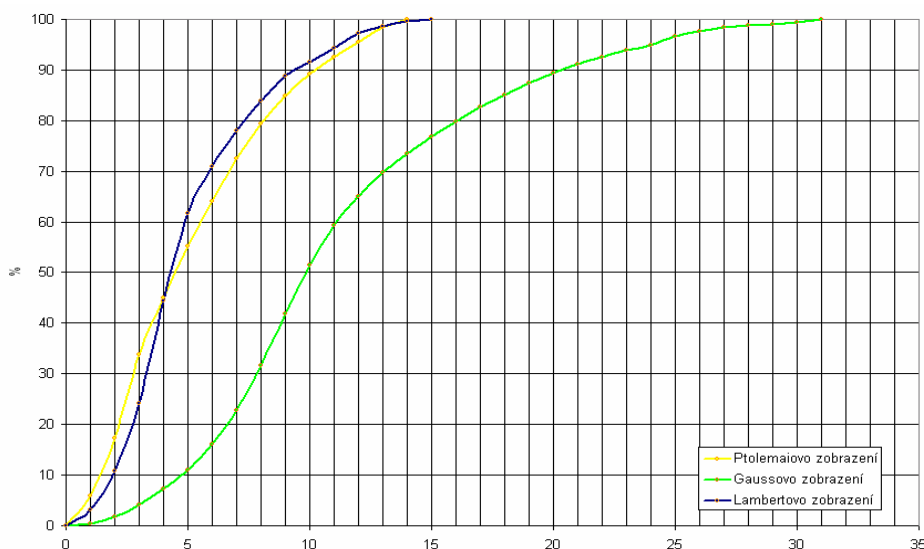
Základním kritériem pro nalezení optimálních parametrů náhradních zobrazení byla maximální hodnota polohové odchylky zjištěné pro cca 13 000 bodů pravidelně rozložených na území ČR. Pro jednotlivá zobrazení bylo dosaženo těchto hodnot:

Lambertovo zobrazení..... 14,5 m,

Gaussovo zobrazení..... 31,2 m,

Ptolemaiovo zobrazení..... 13,8 m.

Ve všech třech případech dosáhly polohové odchylky od Křovákova zobrazení maxima na okraji republiky a na většině území jsou jejich hodnoty menší (viz obr. 2, 3, 4). Přesto je více než 30 metrů u Gaussova zobrazení hodnota příliš velká i pro geografické účely a byla by akceptovatelná maximálně na mapách měřítko 1 : 25 000, kde představuje 1 mm (na mapě měřítko 1 : 10 000 se jedná již o 3 mm). Hodnoty pro Lambertovo a Ptolemaiovo zobrazení jsou prakticky stejné a obě zobrazení jsou jako náhrada vhodná. Malá hodnota (0,7 m) o kterou je menší odchylka u Ptolemaiova zobrazení není pro praktické použití rozhodující, významnějším ukazatelem je rozložení odchylek na území republiky. Přehledně je toto rozložení vyjádřeno grafem kumulativní četnosti na obr. 5. Na vodorovné ose jsou v metrech hodnoty odchylek, na svislé v procentech kumulativní četnost. Z grafu je patrné, že



Obr. 5 Kumulativní četnosti odchylek jednotlivých zobrazení

u Ptolemaiova zobrazení je větší četnost malých odchylek a menší četnost odchylek větších. I když rozdíl oproti Lambertovu zobrazení není příliš velký, je rozložení odchylek u Ptolemaiova zobrazení výhodnější, což spolu s nejmenší maximální odchylkou určuje toto zobrazení jako nejlepší náhradu zobrazení Křovákova.

Výsledek je poměrně překvapivý a svědčí o tom, že pro relativně malé území ČR jsou rozdíly mezi konformním a vyrovnávacím zobrazáním tak malé, že vhodnou volbou parametrů může být vyrovnávací zobrazení vhodnou náhradou konformního.

8 Závěr

Zvolený postup hledání aproximace zobrazení byl ověřen jako vhodný. Bylo nalezeno zobrazení, které pro geografické účely může vhodně nahradit specifické Křovákovo zobrazení v aplikacích GIS a GPS.

Literatura

- [1] BUCHAR, Petr. *Matematická kartografie*. Druhé vydání. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2002. 203 stran. ISBN 80-01-02534-9
- [2] DUŠEK, Radek – HÁJEK, Oldřich. Vliv konformního zobrazení na rozlohu ČR. In *MATLAB 2002*. Praha: Humusoft, 2002. s. 77–79. ISBN 80-7080-500-5
- [3] MACH, Jan. Aproximace Křovákova zobrazení. Ostrava: Ostravská univerzita, 2005. 76 s. Diplomová práce obhájená na Přírodovědecké fakultě OU.
- [4] GÁBOR, Timár – DANIŠÍK, Martin. Aproximácia Křovákovo zobrazenia Lambertovým konformným kuželovým zobrazáním na území Slovenska pre potreby GIS a GPS. In *Kartografické listy*. č. 11. Bratislava, 2003. ISBN 80-89060-04-8. s. 100–102