

NOVÝ REKURENTNÍ ALGORITMUS PRO ROZBALENÍ FÁZE ANALYTICKÉHO SIGNÁLU

M. Kupczak

VŠB-TU Ostrava, fakulta strojní, Katedra automatizační techniky a řízení

Abstract

Tento příspěvek přináší nový pohled na možnost rozbalení fáze analytického signálu. Na rozdíl od běžně používaného algoritmu by měla tato nová metoda lépe rozlišit přirozené skoky ve fázové charakteristice od bodů nespojivosti, které jsou důsledkem použití základního vzorce, jímž je inverzní tangenta.

1 Analytický signál

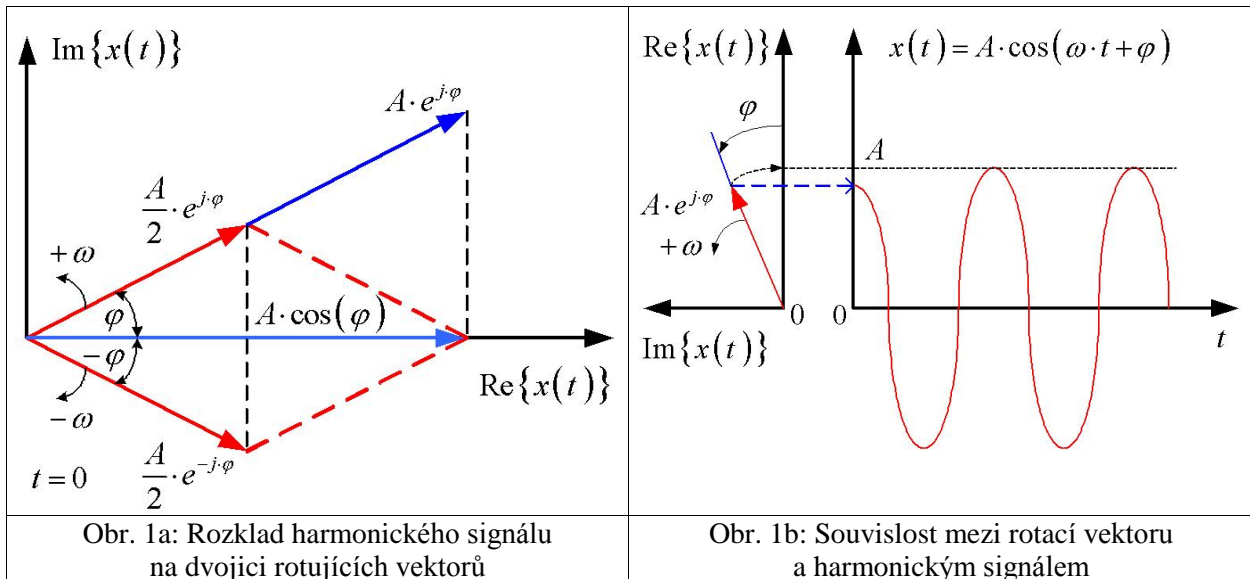
Analytický signál [2] je uměle vytvořený signál z výchozího signálu. Původ výchozího signálu může být například v měření nějaké fyzikální veličiny, a proto jej můžeme také nazvat reálný ve smyslu dalšího zobecnění na obor komplexních čísel. K tomuto reálnému signálu je v definici analytického signálu připojena imaginární část. Z reálné funkce se spojitým časem nebo z posloupnosti vzorkovaných hodnot vznikne komplexní funkce se spojitým časem nebo posloupnost komplexních čísel. Imaginární část je definována tak, aby umožnila snadno analyzovat modulační efekty nízkofrekvenčních signálů na nosné signály o vyšší frekvenci než je nejvyšší frekvence modulačního signálu. K vytvoření imaginární části analytického signálu je užitá Hilbertova transformace.

Vytvoření analytického signálu bude ukázáno na jednoduchém příkladě, kde vstupní signál $x(t)$ nechť je harmonický signál. Harmonický signál je obecně definován jako reálná časová funkce typu $x(t) = a \cdot \cos(\omega t) + b \cdot \sin(\omega t)$, kde a , b jsou reálná čísla, ω je úhlová rychlost a t je čas. Mezi úhlovou rychlostí ω a frekvencí f platí známý vztah $\omega = 2\pi f$. Ekvivalentní zápis je $x(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$, kde amplituda A a počáteční fáze φ souvisejí s parametry výše uvedeného výchozího tvaru. Fáze harmonického signálu, kterou představuje výraz $\omega \cdot t + \varphi$, je lineární funkcí času. V teorii signálů jsou skládány harmonické signály, které se liší v amplitudě, fázi a úhlové rychlosti. Pro tuto operaci je výhodné znázornit harmonický signál pomocí komplexních funkcí v exponenciálním tvaru. Podle známého Eulerova vzorce platí vztah (1).

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) = \frac{A}{2} \cdot e^{j \cdot (\omega t + \varphi)} + \frac{A}{2} \cdot e^{-j \cdot (\omega t + \varphi)} \quad (1)$$

Reálný harmonický signál lze nahradit součtem dvou komplexně sdružených funkcí času, tj. funkcemi se shodnými reálnými částmi a opačnými imaginárními částmi. Mezi harmonické funkce lze zařadit i konstantu, které odpovídá harmonická funkce s nulovou úhlovou frekvencí.

Absolutní hodnota zmíněných komplexně sdružených funkcí je rovna poloviční amplitudě harmonického signálu a ryze imaginární exponent základu přirozených algoritmů e je fází. Funkční hodnoty komplexní funkce v komplexní rovině představují body nebo také vektory s počátkem v nule komplexní roviny a s koncovým bodem o souřadnicích, které jsou dány reálnou a imaginární částí funkčních hodnot (viz obr. 1a). Koncový bod vektoru každé komplexní funkce z rozkladu 1 se s rostoucím časem pohybuje po kružnici, což znamená, že příslušný vektor rotuje. V teorii signálů je pro rotující vektor používáno speciální označení, a to fazor. Fáze vektoru $A/2 \cdot e^{j \cdot \varphi} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}$ se zvětšuje s časem v kladném směru a fáze vektoru $A/2 \cdot e^{-j \cdot \varphi} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t}$ se zvětšuje s časem v záporném směru. Často se hovoří o kladném, resp. záporném směru rotace vektoru. Počáteční poloha vektoru rotujícího v kladném směru je $A/2 \cdot e^{j \cdot \varphi}$ a počáteční poloha vektoru rotujícího v záporném směru je $A/2 \cdot e^{-j \cdot \varphi}$. Výsledek součtu dvou komplexně sdružených vektorů je reálné číslo. Stejný efekt dává průběh průmětu vektoru $A \cdot e^{j \cdot \varphi} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}$ do reálné osy komplexní roviny (viz obr. 1b).

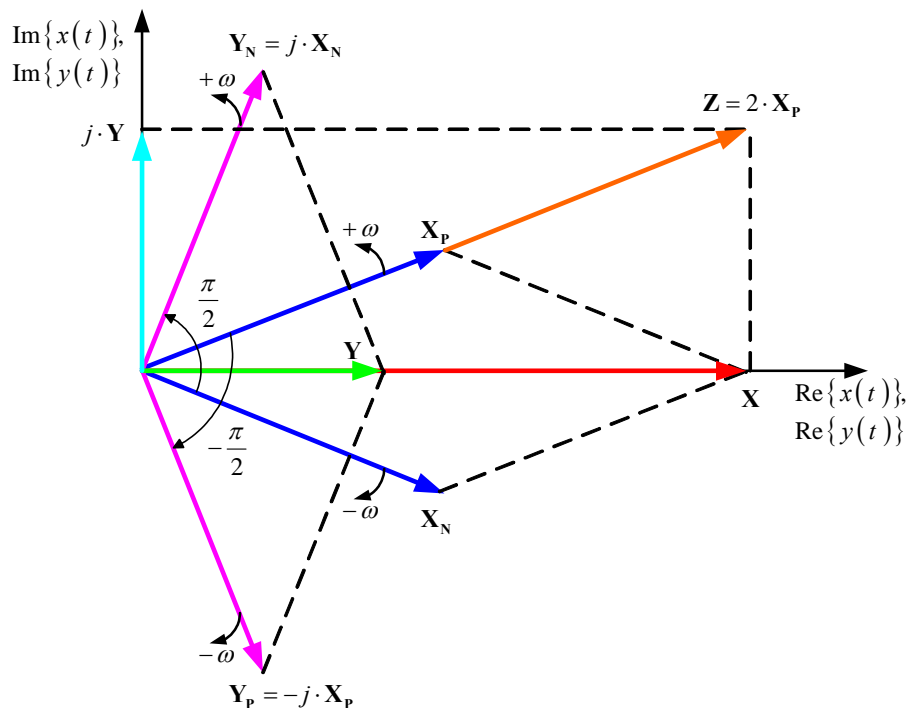


Harmonický signál $x(t)$ lze tedy také nahradit součtem dvou vektorů, které rotují shodnou úhlovou rychlostí ve vzájemně opačném směru a jejich výslednice má směr reálné osy (viz 2).

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_P + \mathbf{X}_N, \quad (2)$$

kde $\mathbf{X}_P = \frac{A}{2} \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}$ a $\mathbf{X}_N = \frac{A}{2} \cdot e^{-j(\omega t + \varphi)}$.

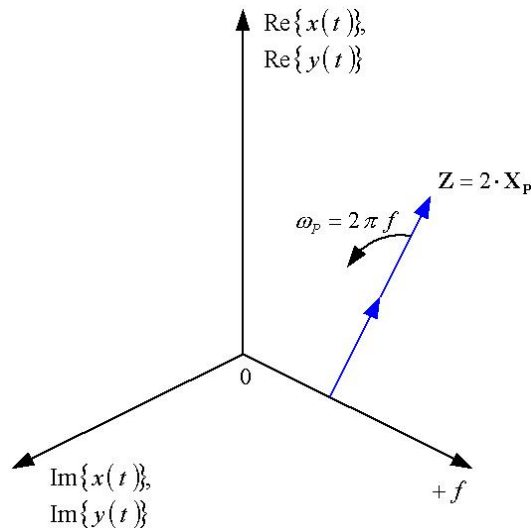
Analytický signál $z(t) = x(t) + j \cdot y(t)$ lze získat tak, že k danému součtu rotujících vektorů $\mathbf{X} = \mathbf{X}_P + \mathbf{X}_N$ se modeluje rovněž součet vektorů $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_P + \mathbf{Y}_N$, které rotují shodnou rychlostí proti sobě jako složky vektoru \mathbf{X} . O 90 stupňů pootočený vektor \mathbf{Y}_N musí vyrušit vektor \mathbf{X}_N , tj. $\mathbf{Y}_N - j \cdot \mathbf{X}_N = 0$. Aby vektor \mathbf{Y} měl koncový bod na reálné ose, je třeba, aby \mathbf{Y}_P a \mathbf{Y}_N byly vzájemně komplexně sdružené. Grafické zdůvodnění vazeb mezi zmíněnými vektory je zobrazeno na obr. 2.



Obr. 2: Grafické zobrazení sestavení analytického signálu

Výsledek součtu $z(t) = x(t) + j \cdot y(t)$, označovaný jako analytický signál, má obsahovat jen složky, které rotují kladným směrem. Pokud vektor \mathbf{Y} bude mít složky tvaru $\mathbf{Y}_P = -j \cdot \mathbf{X}_P$ a $\mathbf{Y}_N = j \cdot \mathbf{X}_N$, pak velikost analytického signálu bude $\mathbf{Z} = 2 \cdot \mathbf{X}_P$ (viz 3), tj. vektor s konstantní délkou, která je shodná s amplitudou harmonického signálu (viz obr. 3).

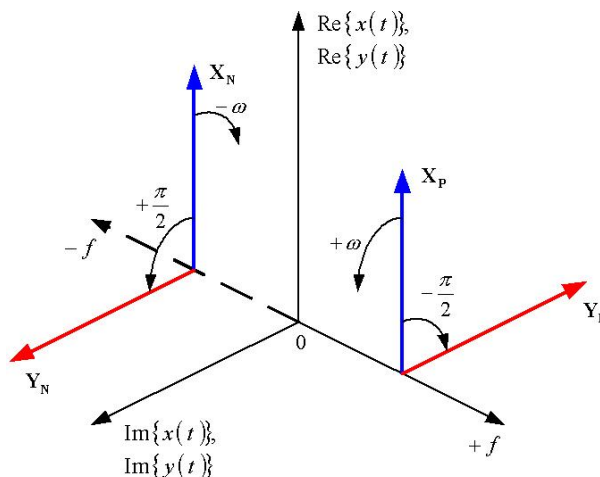
$$\begin{aligned} z(t) &= x(t) + j \cdot y(t) = [\mathbf{X}_P + \mathbf{X}_N] + j \cdot [\mathbf{Y}_P + \mathbf{Y}_N] \\ &= \mathbf{X}_P + \mathbf{X}_N + j \cdot (-j \cdot \mathbf{X}_P) + j \cdot j \cdot \mathbf{X}_N = \mathbf{X}_P + \mathbf{X}_N + \mathbf{X}_P - \mathbf{X}_N \\ &= 2 \cdot \mathbf{X}_P \end{aligned} \quad (3)$$



Obr. 3: Grafické zobrazení výsledného analytického signálu

2 Hilbertova transformace

Hilbertova transformace je užitečný nástroj k vytvoření komplexního signálu, který ve svém rozkladu obsahuje vektory rotující jen jedním směrem. Hilbertovu transformaci lze demonstrovat na obr. 4. Vektory \mathbf{X}_P a \mathbf{X}_N , příslušející výchozímu časovému signálu $x(t)$ (v příkladu kosinus), se transformují otočením o 90° v opačném směru na vektory \mathbf{Y}_P a \mathbf{Y}_N , které přísluší Fourierově transformaci časového signálu $y(t)$, jenž je Hilbertovou transformací výchozího signálu $y(t)$ (v příkladu sinus).



Obr. 3: Grafické zobrazení důsledku Hilbertovy transformace

Výsledek transformace je součin Fourierovy transformace signálu $X(\omega) = \text{FT}\{x(t)\}$ a funkce úhlové frekvence $-j \cdot \text{sign}(\omega)$. Přenos této lineární soustavy lze zapsat vzorcem (4).

$$G_{HT}(\omega) = \begin{cases} -j, & \omega > 0 \\ j, & \omega < 0 \end{cases} \quad (4)$$

Originálem k této funkci je ve Fourierově transformaci následující funkce času (5).

$$\text{FT} \left\{ \frac{1}{\pi \cdot t} \right\} = -j \cdot \text{sign}(\omega) \quad (5)$$

Hilbertova transformace signálu $x(t)$ je výsledkem výpočtu konvoluce (viz 7) tohoto signálu s časovým signálem z předcházejícího vzorce

$$g_{HT}(t) = \frac{1}{\pi \cdot t},$$

který představuje impulsní odezvu lineární soustavy. Odezva je definována pro celou časovou osu s výjimkou jejího počátku ($t = 0$). Vzhledem k nenulové hodnotě odezvy pro záporný čas, není tato soustava kauzální, neboť odezva existuje dříve než ji excituje vstupní Diracův impuls v počátku časové osy. Transformační vzorec Hilbertovy transformace ve frekvenční oblasti (viz 6) je dán součinem Fourierova obrazu výchozího signálu $x(t)$ a přenosem lineární soustavy (4).

$$Y(\omega) = G_{HT}(\omega) \cdot X(\omega) \quad (6)$$

Imaginární část analytického signálu lze vyjádřit rovněž v časové oblasti pomocí konvolutorního integrálu (7).

$$y(t) = g_{HT}(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_{HT}(t-\tau) \cdot x(\tau) \cdot d\tau = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\tau)}{t-\tau} \cdot d\tau \quad (7)$$

Protože analytický signál je komplexní funkce času, jeho časový průběh lze znázornit v algebraickém tvaru komplexních čísel, tj. zvlášť reálnou a imaginární část, nebo také v exponenciálním tvaru, tj. zvlášť absolutní hodnotu a fázi. Souvislost obou tvarů analytického signálu je následující (viz 8)

$$z(t) = x(t) + j \cdot y(t) = E(t) \cdot e^{j\varphi(t)} \quad (8)$$

kde

$$E(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} \quad (9)$$

je absolutní hodnota komplexního čísla a $\varphi(t)$ je fáze.

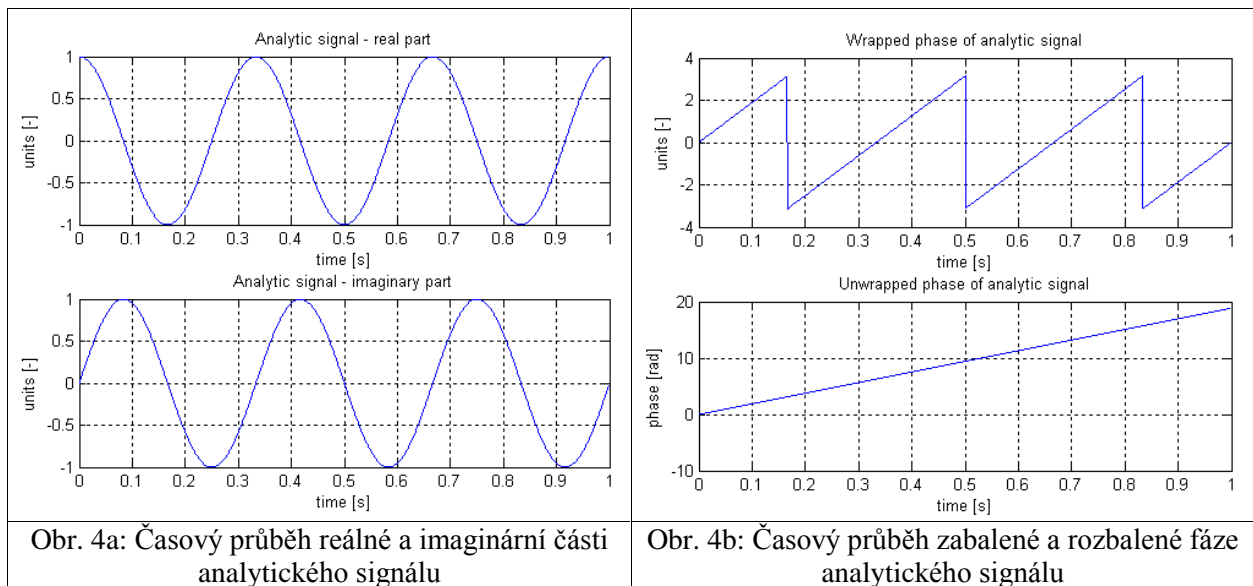
V intervalu od $-\pi$ do $+\pi$ lze fázi vypočítat podle vzorce (10).

$$\varphi(t) = \text{arctg} \left(\frac{y(t)}{x(t)} \right) \quad (10)$$

Je ovšem nutné použít informaci o poloze komplexního čísla v komplexní rovině. Na základě podílu $y(t)/x(t)$ lze určit jen úhel od $-\pi/2$ do $+\pi/2$. Harmonické signály souvisejí s rotací vektorů, proto pro úhly otočení větší v absolutní hodnotě než π je třeba hodnoty fáze, které byly vypočteny inverzní funkcí tangens korigovat postupem, kterému se říká rozbalení fáze. Absolutní hodnota analytického signálu má význam obálky jeho reálné části. Fázi analytického signálu lze interpretovat ve spojitosti s průběžnou časovou změnou fáze jednoho z dvojice vektorů, na které lze signál rozložit, a to vektoru rotujícího v kladném směru.

3 Klasický postup rozbalení fáze analytického signálu

Výpočet amplitudy analytického signálu je jednoznačný. Naproti tomu fázi lze zjistit pomocí vztahu (10) jen v intervalu od $-\pi$ do $+\pi$. Fáze harmonického signálu ($\varphi(t) = \omega \cdot t$) přesahuje zřejmě při určité úhlové frekvenci uvedené hranice. Vypočtenou fázi podle základního vzorce (viz 10) je třeba rozbalit (unwrap). To znamená, že například při pozvolném vzrůstu (resp. poklesu) fáze v čase je zajištěn plynulý přechod přes hranici $+\pi$ (resp. $-\pi$) místo skoku k $-\pi$ (resp. $+\pi$) u nerozbaleného časového průběhu fáze analytického signálu. Příklad, který demonstruje nerozbalenou a rozbalenou fázi harmonického signálu, je na obr. 4.



Obr. 4a: Časový průběh reálné a imaginární části analytického signálu

Obr. 4b: Časový průběh zabalené a rozbalené fáze analytického signálu

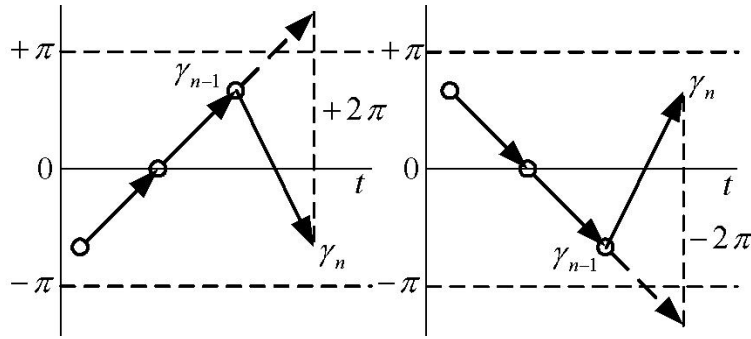
Obr. 3: Grafické zobrazení reálné a imaginární části analytického signálu

Před formulací algoritmu bude odvozena maximální možná změna fáze mezi jednotlivými časovými vzorky. Necht' vzorkovací frekvence je $f_s = 1/\Delta t$, kde Δt je časový interval mezi vzorky. Nejvyšší frekvence vzorkovaného signálu má být podle Shannonova-Kotelníkova teoremu menší než polovina vzorkovací frekvence $f < f_s/2$. Jednoduchými úpravami (násobením 2π , náhradou f_s výrazem Δt a zavedením $\omega = 2\pi f$) lze obdržet podmínku pro omezení přírůstku fáze $\Delta\varphi$ (11).

$$\Delta\varphi = \omega \cdot \Delta t < \pi \quad (11)$$

Jestliže bude předpokládána teoreticky možnost i záporné úhlové frekvence, pak lze zobecnit omezení absolutní hodnoty změny fáze $|\omega \cdot \Delta t|$ na úhel π . Jestliže je tedy signál správně nevzorkován, pak největší změna rozbalené fáze je menší než π . Těto vlastnosti lze využít v klasickém algoritmu rozbalování.

Výchozí posloupnost vypočtených fází od $-\pi$ do $+\pi$ je γ_n , $n = 0, 1, 2, \dots$. Je zřejmé, že první hodnotu fáze v časové ose γ_0 není třeba měnit. Pro další hodnoty fáze se rozhoduje o přičtení nebo odečtení úhlu 2π na základě vyhodnocení změny fáze $\gamma_n - \gamma_{n-1}$. Jestliže tato změna je menší než $-\pi$, pak se rozbalovaná fáze zvětšuje o 2π a naopak, jestliže tato změna fáze je větší než $+\pi$, pak se rozbalovaná fáze zmenšuje o 2π . Tento princip klasického přístupu rozbalování fáze je zobrazen na obr. 5. Pro úplnost, jestliže je absolutní změna $\gamma_n - \gamma_{n-1}$ menší než π , pak je skok fáze nulový. V posloupnosti výchozích hodnot fází se určí místa případného skoku o hodnotu $+2\pi$ nebo -2π a výsledná posloupnost, která střídá různě hodnoty -2π , 0 , $+2\pi$, se integruje ve formě postupného kumulovaného součtu, ke kterému se přičte výchozí posloupnost fází γ_n , $n = 0, 1, 2, \dots$. Hodnoty rozbalené fáze signálu se tedy pohybují v pásmech od úhlu $(2k-1) \cdot \pi$ do úhlu $(2k+1) \cdot \pi$, kde k je celé číslo.



Obr. 5: Grafické zobrazení klasického způsobu rozbalování fáze analytického signálu

4 Nový rekurentní algoritmus pro rozbalení fáze analytického signálu

Odvození nového rekurentního algoritmu pro rozbalení fáze analytického signálu vychází z [1]. Předpokládejme, že máme k dispozici novou hodnotu analytického signálu v časovém okamžiku t_n a minulou hodnotu analytického signálu v časovém okamžiku t_{n-1} . Tato komplexní čísla můžeme zapsat jednak v algebraickém, tak i v exponenciálním tvaru (viz 12a, 12b).

$$z(n) = x(n) + j \cdot y(n) = E(n) \cdot e^{j\varphi(n)} \quad (12a)$$

$$z(n-1) = x(n-1) + j \cdot y(n-1) = E(n-1) \cdot e^{j\varphi(n-1)} \quad (12b)$$

Pomocí rozdílu těchto komplexních čísel lze vyjádřit změnu fáze $\Delta\varphi$ (viz 13).

$$\begin{aligned} \Delta z &= z(n) - z(n-1) = [x(n) + j \cdot y(n)] - [x(n-1) + j \cdot y(n-1)] \\ &= [x(n) - x(n-1)] + j \cdot [y(n) - y(n-1)] \end{aligned}$$

$$\Delta z = \Delta x + j \cdot \Delta y = \Delta E \cdot e^{j \cdot \Delta\varphi} = \Delta E \cdot \cos(\Delta\varphi) + j \cdot \Delta E \cdot \sin(\Delta\varphi) \quad (13)$$

Tangenta rozdílu dvou úhlů, tj. přírůstku fáze je dána podílem (14).

$$\operatorname{tg}(\Delta\varphi) = \operatorname{tg}[\varphi(n) - \varphi(n-1)] = \frac{\Delta E \cdot \sin[\varphi(n) - \varphi(n-1)]}{\Delta E \cdot \cos[\varphi(n) - \varphi(n-1)]} = \frac{\sin[\varphi(n) - \varphi(n-1)]}{\cos[\varphi(n) - \varphi(n-1)]} \quad (14)$$

Vztah pro určení tangenty přírůstku fáze je vhodné upravit do tvaru (15) použitím jednoho vzorečku trigonometrické identity.

$$\operatorname{tg}[\varphi(n) - \varphi(n-1)] = \frac{\operatorname{tg}[\varphi(n)] - \operatorname{tg}[\varphi(n-1)]}{1 + \operatorname{tg}[\varphi(n)] \cdot \operatorname{tg}[\varphi(n-1)]} \quad (15)$$

Úprava vztahu (14) na (15) je velice užitečná, neboť nemusíme počítat sinus a kosinus změny přírůstku fáze, ale jednoduše určit tangenty těchto úhlů jako podíl příslušné imaginární a reálné části komplexního čísla (viz 16a, 16b).

$$\theta(n) = \operatorname{tg}[\varphi(n)] = \frac{y(n)}{x(n)} \quad (16a)$$

$$\theta(n-1) = \operatorname{tg}[\varphi(n-1)] = \frac{y(n-1)}{x(n-1)} \quad (16b)$$

Přírůstek fáze dvou sousedních komplexních čísel (použitím výše uvedené substituce) lze zapsat ve finálním tvaru (17).

$$\Delta\varphi = \varphi(n) - \varphi(n-1) = \operatorname{arctg} \left[\frac{\theta(n) - \theta(n-1)}{1 + \theta(n) \cdot \theta(n-1)} \right] \quad (17)$$

5 Závěr

Tento příspěvek přináší nástin nové metody rozbalení fáze analytického signálu. Na rozdíl od běžně používaného algoritmu by měla tato nová metoda lépe rozlišit přirozené skoky ve fázové charakteristice od bodů nespojitosti, které jsou důsledkem použití základního vzorce, jímž je inverzní tangenta.

Do uzávěrky nebyla bohužel tato metoda plně analyzována. Konkrétní výsledky a porovnání se stávající metodou budou zmíněny pravděpodobně v autorově disertační práci.

References

- [1] Abba, K. A New Recurrent Approach for Phase Unwrapping, Chaoyang University of Technology, 2005. ISSN 1727-2394.
- [2] Tůma, J. *Zpracování signálů získaných z mechanických systémů užitím FFT*. Sdělovací technika, Praha 1997. ISBN 80-901936-1-7.

Ing. Marek Kupczak
Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava
Fakulta strojní
Katedra automatizační techniky a řízení

17. listopadu 15

OSTRAVA-PORUBA

marek.kupczak@seznam.cz