

VÝPOČET PARAMETRŮ A GEOMETRIE TROLEJOVÉHO VEDENÍ V MATLABU

T. Krčma

Elektrizace železnic Praha a. s.
náměstí Hrdinů 1693/4a, 140 00 Praha 4 – Nusle

Abstrakt

Moderní metody montáže a projektování i vývoj nových, především vysokorychlostních variant trolejového vedení jsou podmíněny existencí spolehlivého matematického popisu trolejového vedení. Dříve používané empirické vzorce nevyhovují pro svou nepřesnost; použití FEM je u soustavy lan zbytečné a neúměrně složité. Příspěvek ukazuje možnost zjednodušeného matematického popisu trolejového vedení a prezentuje dosažené výsledky.

1 Úvod

Železniční trolejové vedení je systém, sestávající z trolejového drátu, zavěšeného pomocí věšáků na nosné lano (obr. 1). Průřez měděných nebo bronzových vodičů je $50 - 150 \text{ mm}^2$, tahová síla ve vodičích je u konvenčních vedení $8 - 15 \text{ kN}$, u vysokorychlostních pak při použití mědi legované stříbrem nebo hořčíkem až 25 kN .



Obr. 1: Základní části trolejového vedení

Kvalitní vedení musí splňovat dvě základní podmínky:

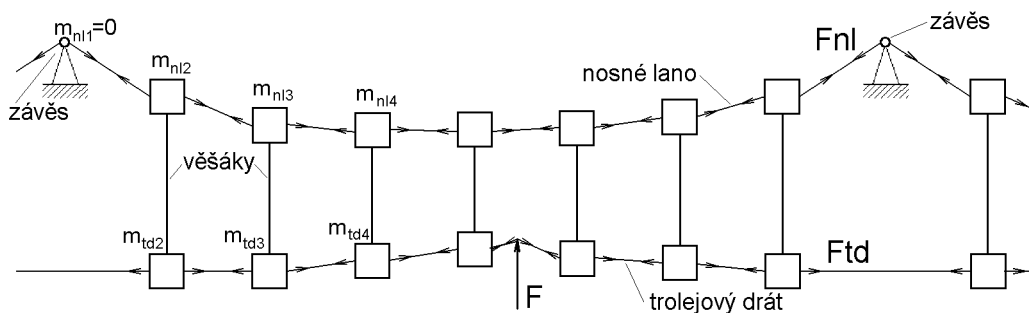
- výška trolejového drátu vůči koleji je konstantní;
- svislá tuhost (pružnost) trolejového vedení je co možná stálá.

První podmínka vede na výpočet délky věšáků. Dosud jsou v ČR délky věšáků při montáži určovány zkusmo; výpočet a tovární předvýroba by tedy mohly přinést podstatné časové úspory. Požadovaná přesnost výpočtu je v řádu centimetrů, což odpovídá chybě cca 1%. Druhá podmínka vede na výpočet tuhosti vedení. Výpočet by umožnil předvídat tento parametr u vývojových typů trolejových vedení, aniž by bylo nutné realizovat zkušební úseky, a v součinnosti s dynamickými simulacemi by umožnil předvídat i kvalitu interakce s lokomotivními sběrači. Požadovaná přesnost výpočtu je nižší, okolo 10%.

V tomto příspěvku jsou prezentovány postupy výpočtu vyvinuté a ověřené na našem pracovišti. Příspěvek se zabývá pouze výpočty trolejového vedení bez tzv. přídatných lan, jejichž účelem je snížení tuhosti trolejového vedení v místě závěsu (viz obr. 6 a obr. 7). V případě vedení s přídatnými lany jsou postupy obdobné, ovšem podstatně složitější, takže se jimi není možné vzhledem k rozsahu a účelu příspěvku podrobně zabývat. Příložené skripty a funkce Matlabu jsou však úplnými verzemi umožňujícími i tyto výpočty.

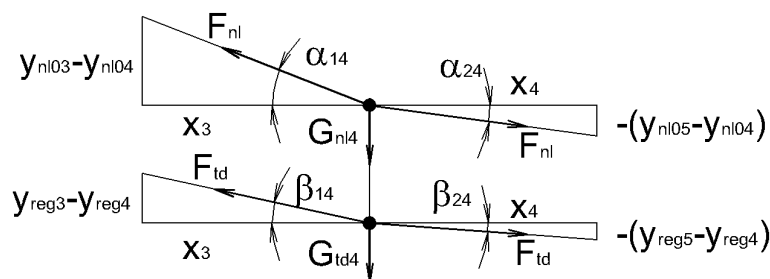
2 Princip vytvoření fyzikálního modelu

Základní myšlenkou je diskretizace trolejového vedení na elementární hmotné body, do nichž je soustředěna tíha odpovídajících úseků vodičů. Umístění těchto bodů odpovídá umístění věšáků. Kromě závěsu nosného lana (žádný stupeň volnosti) mají hmotné body 1 stupeň volnosti, tj. možnost svislého pohybu. Vzájemně na sebe hmotné body působí pouze silou rovnou tahu ve vodiči, neboť ohybovou tuhost vodičů lze zanedbat. Vzhledem k jedinému stupni volnosti se navíc může projevit pouze svislá složka této síly v případě, není-li svislá souřadnice sousedních bodů shodná. Silové působení mezi hmotnými body tedy vzniká jednak u nosného lana díky jeho průhybu, jednak u trolejového drátu v případě, že je zdvihán sběračem. Na obr. 2 je tento případ schematicky znázorněn. Elementární hmoty nosného lana jsou značeny $m_{nl(k)}$, hmoty trolejového drátu $m_{td(k)}$. Je naznačen i způsob číslování elementárních hmot, kdy hmota nosného lana s indexem $k = 1$ připadá nepohyblivému závěsu. Síla F představuje přítláčnou sílu sběrače, F_{td} a F_{nl} jsou tahy v trolejovém drátu a nosném laně.



Obr. 2: Znázornění principu diskretizace trolejového vedení

Výška trolejového drátu u závěsu a jednotlivých věšáků je označena $y_{reg(k)}$ (výška regulace) a je buď nulová v případě přesné regulace do roviny, kladná v případě zdvižení trolejového drátu sběračem, nebo záporná v případě tzv. předprůhybu, nejčastěji v obloucích trati. Výška nosného lana značená $y_{nl0(k)}$ je v místě závěsu kladná ($k = 1; k = n$) a rovna tzv. výšce sestavy. Směrem ke středu rozpětí postupně klesá a jsou-li výšky sestavy u obou závěsů shodné, uprostřed rozpětí dosahuje svého minima. Toto minimum nesmí být z konstrukčních důvodů (nejkratší délka věšáku) menší než cca 20 cm. Vodorovné odlehlosti věšáků jsou označeny x_k . Pro $k = 1$ je x_k rovno vzdálenosti prvního věšáku od závěsu; pro další indexy je x_k rovno vzájemné vzdálenosti $(k - 1)$ a k -tého věšáku.



Obr. 3: Sestavení silové rovnováhy na jednom věšáku, $k=4$

Po zavedení těchto proměnných lze pro každý věšák napsat rovnici rovnováhy sil (obr. 3):

$$F_{nl} \sin \alpha_{1k} + F_{nl} \sin \alpha_{2k} + F_{td} \sin \beta_{1k} + F_{td} \sin \beta_{2k} - G_{nlk} - G_{tdk} = 0 \quad (1)$$

kde $G_{td(k)}$ a $G_{nl(k)}$ jsou tíhy příslušných úseků vodičů.

Při prvním přiblížení výpočtu délky věšáků a vždy při výpočtu tuhosti vedení lze vzhledem k malé odchylce sklonu vodičů od vodorovné roviny nahradit funkci sinus funkcí tangens:

$$\begin{aligned}\sin \alpha_{1k} \approx \operatorname{tg} \alpha_{1k} &= \frac{y_{nl0(k-1)} - y_{nl0k}}{x_{k-1}}; \quad \sin \alpha_{2k} \approx \operatorname{tg} \alpha_{2k} = \frac{y_{nl0(k+1)} - y_{nl0k}}{x_k} \\ \sin \beta_{1k} \approx \operatorname{tg} \beta_{1k} &= \frac{y_{reg(k-1)} - y_{reg(k)}}{x_{k-1}}; \quad \sin \beta_{2k} \approx \operatorname{tg} \beta_{2k} = \frac{y_{reg(k+1)} - y_{reg(k)}}{x_k}\end{aligned}\quad (2)$$

Po dosazení (2) do (1) a úpravě dostaneme rovnici silové rovnováhy pro jeden věšák:

$$\begin{aligned}F_{nl} \left[\frac{y_{nl0(k-1)}}{x_{k-1}} - y_{nl0k} \left(\frac{1}{x_{k-1}} + \frac{1}{x_k} \right) + \frac{y_{nl0(k+1)}}{x_k} \right] + F_{td} \left[\frac{y_{reg(k-1)}}{x_{k-1}} - y_{reg(k)} \left(\frac{1}{x_{k-1}} + \frac{1}{x_k} \right) + \frac{y_{reg(k+1)}}{x_k} \right] - \\ - G_{nlk} - G_{tdk} = 0\end{aligned}\quad (3)$$

Tato rovnice je již lineární a jejich soustavu pro $k=1$ až n lze snadno řešit.

3 Výpočet délky věšáků

3.1 Vstupní a výstupní údaje

Při výpočtu délky věšáků se nepředpokládá působení jakékoliv vnější síly na trolejové vedení. Výpočet se provádí vždy pro jedno rozpětí, které je reprezentováno jednou soustavou rovnic. Vstupními údaji výpočtu jsou:

- výšky sestavy $y_{nl01}, y_{nl0(n)}$;
- vodorovné umístění věšáků x_k ;
- tahy ve vodičích F_{td}, F_{nl} a jejich délkové hmotnosti (pro výpočet $G_{td(k)}, G_{nl(k)}$);
- požadovaný průběh regulace trolejového drátu $y_{reg(k)}$.

Výstupními údaji výpočtu jsou:

- výška nosného lana v místě věšáků $y_{nl0(k)}$; $k = 2 \dots n - 1$.

Délka věšáků se určí snadno pomocí výšky nosného lana a případné regulace trolejového drátu:

$$y_{ves(k)} = y_{nl0(k)} - y_{reg(k)}; \quad k = 2 \dots n - 1 \quad (4)$$

3.2 Postup výpočtu

Výpočet vychází ze soustavy rovnic (3). Napíšeme-li tyto rovnice pro všechny věšáky, tj. pro $k = 2 \dots n - 1$ a uvědomíme-li si, že y_{nl01} a $y_{nl0(n)}$ jsou známé, získáme soustavu $n - 2$ rovnic o $n - 2$ neznámých. Pro snadné numerické zpracování použijeme maticové vyjádření

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{G} \quad (5)$$

Jednotlivé matice mají jednoduchou strukturu, díky které je lze snadno sestavit z jednotlivých proměnných maticovými operacemi v Matlabu:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right) & \frac{1}{x_2} & & & \\ \frac{1}{x_2} & -\left(\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) & \frac{1}{x_3} & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \frac{1}{x_{n-2}} & -\left(\frac{1}{x_{n-2}} + \frac{1}{x_{n-1}}\right) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_{nl02} \\ y_{nl03} \\ \vdots \\ y_{nl0(n-1)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} G_{nl2} + G_{td2} - F_{nl} \frac{y_{nl01}}{x_1} - F_{td} \frac{y_{reg3} - y_{reg2}}{x_2} \\ G_{nl3} + G_{td3} - F_{td} \frac{y_{reg2} - y_{reg3}}{x_2} - F_{td} \frac{y_{reg4} - y_{reg3}}{x_3} \\ \vdots \\ G_{nl(n-1)} + G_{td(n-1)} - F_{nl} \frac{y_{nl0n}}{x_{n-1}} - F_{td} \frac{y_{reg(n-2)} - y_{reg(n-1)}}{x_{n-2}} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Výpočet neznámého vektoru \mathbf{Y} se v Matlabu provede pomocí operátoru „\”:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X} \setminus \mathbf{G} \quad (7)$$

a prvky vektoru \mathbf{Y} jsou přímo hledanými výškami nosného lana.

Tento postup, založený na zjednodušení (2), ovšem pro praktickou potřebu výroby věšáků, nepostačuje, zvláště při delších rozpětích, kde je úhel sklonu nosného lana od vodorovné roviny v místě závěsu poměrně velký. Dostatečného zpřesnění lze poměrně snadno dosáhnout pomocí dalšího výpočetního kroku, ve kterém již hodnotu funkce sinus nahradíme přesným výrazem (podle Pythagorovy věty):

$$\sin \alpha_{1k} = \frac{y_{0(k-1)} - y_{0k}}{\sqrt{(y_{0(k-1)} - y_{0k})^2 + x_{k-1}^2}} = \frac{y_{0(k-1)} - y_{0k}}{x_{kor(k-1)}} \quad (8)$$

$$\sin \alpha_{2k} = \frac{y_{0(k+1)} - y_{0k}}{\sqrt{(y_{0k} - y_{0(k+1)})^2 + x_k^2}} = \frac{y_{0(k+1)} - y_{0k}}{x_{kor(k)}}$$

Srovnáním (8) a (2) zjistíme, že vztahy se liší pouze výrazem ve jmenovateli, který můžeme označit jako korigovanou hodnotu $x_{kor(k)}$. Velikost korigované hodnoty se určí dosazením výšek nosného lana $y_{0(k)}$ vypočítaných v prvním kroku. Druhý krok se provede shodně s prvním krokem podle (5) a (6) s jediným rozdílem, že hodnoty $x_{(k)}$ ve jmenovatelích prvků matice \mathbf{X} se nahradí hodnotami $x_{kor(k)}$.

4 Výpočet svislé tuhosti (pružnosti)

4.1 Vstupní a výstupní údaje

Při výpočtu svislé tuhosti se v souladu s normou předpokládá působení přítláčné síly sběrače, tj. svislé síly velikosti 100 N (cca 10 kp). Výpočtem jedné soustavy rovnic se získá hodnota tuhosti v jednom bodě rozpětí. Pro získání hladké křivky podél rozpětí je tedy nutné výpočet opakovat, přičemž při každém opakování se působíště síly posouvá od jednoho závěsu ke druhému se zvoleným délkovým krokem (např. 20 cm). Vzhledem ke zjednodušení podle (2) není nutné před výpočtem tuhosti zjišťovat klidovou polohu trolejového drátu ani nosného lana; v souladu se skutečností je vypočítaná tuhost nezávislá na výškách sestavy a z nich plynoucích délkách věšáků. Tuhost nezávisí ani na délkových hmotnostech vodičů, pouze na tahových silách, kterými jsou zatíženy. Vstupními údaji výpočtu jsou:

- vodorovné umístění věšáků x_k ;
- tahy ve vodičích F_{td}, F_{nl} ;
- velikost přítláčné síly F .

Výstupním údajem výpočtu je:

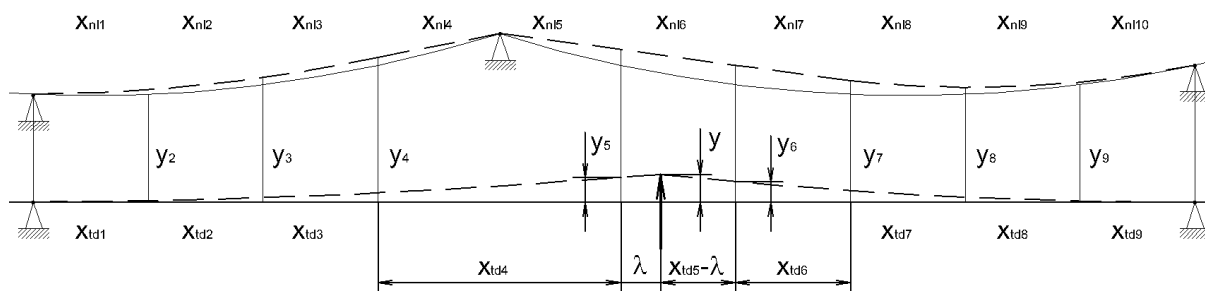
- zdvih trolejového drátu v místě působíště přítláčné síly y .

Tuhost vedení k se určí podle (9). Pružnost vedení e je převrácenou hodnotou tuhosti.

$$k = F / y \quad (9)$$

4.2 Postup výpočtu

Přítláčná síla sběrače teoreticky způsobuje určitý zdvih trolejového drátu i v nekonečné vzdálenosti od svého působíště. Okrajové podmínky výpočtu proto musí být určeny vzdáleností od sběrače, ve které je již zdvih trolejového drátu zanedbatelný. Jako kompromis mezi dobou výpočtu a přesností lze předpokládat nulovou hodnotu zdvihu u pátého nebo šestého věšáku od místa působíště svislé síly. Vlastní sestavování matic je poněkud složitější než při výpočtu délky věšáků, neboť do výpočtu musí vstupovat i sousední rozpětí, která jsou ovlivněna zdvihem trolejového drátu. Obrázek 4 ukazuje příklad poměrů na trolejovém vedení, předpokládáme-li, že pátý věšák od působíště přítláčné síly vykazuje již nulový zdvih a že přítláčná síla působí mezi prvním a druhým věšákem zkoumaného rozpětí.



Obr. 4: Trolejové vedení při působení přítláčné síly

Na rozdíl od výpočtu délek věšáků je nutno rozlišovat vzdálenosti x_k pro nosné lano i trolejový drát (jak je patrné z obrázku, např. $x_{td4} = x_{n14} + x_{n15}$). Okamžitá vzdálenost místa působíště přítláčné síly od předchozího věšáku je označena λ . Zdvihy vodičů v místě jednotlivých věšáků jsou označeny y_k .

Zápis silové rovnováhy, stejně jako sestavování matic je nutné provádět odděleně pro trolejový drát a nosné lano. Vazba mezi oběma vodiči je realizována prostřednictvím síly ve věšácích $F_{v(k)}$. Při výpočtu se dále předpokládá, že nedochází ke zvlnění věšáku, síla $F_{v(k)}$ je tedy kladná.

Pro trolejový drát platí, bez ohledu na umístění závěsů:

$$-G_{td(k)} + F_{v(k)} - F_{td} \frac{y_k - y_{k-1}}{x_{td(k-1)}} - F_{td} \frac{y_k - y_{k+1}}{x_{td(k)}} = 0 \quad (10)$$

pro místo dotyku sběrače mezi věšáky č. 5 a 6 platí:

$$F - F_{td} \frac{y - y_5}{\lambda} - F_{td} \frac{y - y_6}{x_{td5} - \lambda} = 0 \quad (11)$$

Pro celý uvažovaný úsek trolejového drátu je nutno sestavit soustavu rovnic. Její maticový zápis zní:

$$\mathbf{X}_{td} \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{P}_{td}$$

Rozeř matice \mathbf{X}_{td} je pro případ podle obr. 4 9×9 prvků (4 volné věšáky, sběrač, 4 volné věšáky). Vektory \mathbf{Y} a \mathbf{P}_{td} pak mají 9 řádků. Struktura matic podle obr. 4 následující:

$$\mathbf{X}_{td} = F_{td} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{x_{td1}} + \frac{1}{x_{td2}} & -\frac{1}{x_{td2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{x_{td2}} & \frac{1}{x_{td2}} + \frac{1}{x_{td3}} & -\frac{1}{x_{td3}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{x_{td3}} & \frac{1}{x_{td3}} + \frac{1}{x_{td4}} & -\frac{1}{x_{td4}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{x_{td4}} & \frac{1}{x_{td4}} + \frac{1}{\lambda} & -\frac{1}{\lambda} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\lambda} & \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{x_{td5} - \lambda} & -\frac{1}{x_{td5} - \lambda} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{x_{td5} - \lambda} & \frac{1}{x_{td5} - \lambda} + \frac{1}{x_{td6}} & -\frac{1}{x_{td6}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{x_{td6}} & \frac{1}{x_{td6}} + \frac{1}{x_{td7}} & -\frac{1}{x_{td7}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{x_{td7}} & \frac{1}{x_{td7}} + \frac{1}{x_{td8}} & -\frac{1}{x_{td8}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{x_{td8}} & \frac{1}{x_{td8}} + \frac{1}{x_{td9}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{P}_{td} = \begin{bmatrix} -m_{td2}g \\ -m_{td3}g \\ -m_{td4}g \\ -m_{td5}g \\ F \\ -m_{td6}g \\ -m_{td7}g \\ -m_{td8}g \\ -m_{td9}g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{v2} \\ F_{v3} \\ F_{v4} \\ F_{v5} \\ 0 \\ F_{v6} \\ F_{v7} \\ F_{v8} \\ F_{v9} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Pro nosné lano platí:

$$-G_{nl(k)} - F_{v(k)} - F_{nl} \frac{y_k - y_{k-1}}{x_{nl(k-1)}} - F_{nl} \frac{y_k - y_{k+1}}{x_{nl(k)}} = 0 \quad (13)$$

Přítláčná síla sběrače má na silové poměry nosného lana vliv pouze prostřednictvím síly ve věšácích F_v , není jí tedy nutno zohledňovat zvláštní rovnicí. Maticový zápis soustavy rovnic pro nosné lano a všechny věšáky je tedy jednoduchý:

$$\mathbf{X}_{nl} \cdot \mathbf{Y}_{nl} = \mathbf{P}_{nl} \quad (14)$$

$$\mathbf{F}_{nl} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{x_{nl1}} + \frac{1}{x_{nl2}} & -\frac{1}{x_{nl2}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{x_{nl2}} & \frac{1}{x_{nl2}} + \frac{1}{x_{nl3}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{x_{nl8}} + \frac{1}{x_{nl9}} & -\frac{1}{x_{nl9}} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{x_{nl9}} & \frac{1}{x_{nl9}} + \frac{1}{x_{nl10}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_{nl2} \\ y_{nl3} \\ \vdots \\ y_{nl9} \\ y_{nl10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g \cdot m_{nl2} \\ -g \cdot m_{nl3} \\ \vdots \\ -g \cdot m_{nl9} \\ -g \cdot m_{nl10} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_{v2} \\ F_{v3} \\ F_{v4} \\ 0 \\ F_{v5} \\ F_{v6} \\ F_{v7} \\ F_{v8} \\ F_{v9} \end{bmatrix} \quad (15)$$

Pro další postup je nutné si uvědomit, že hmotný bod odpovídající závěsu u stožáru nemá možnost pohybu ve svislém směru (viz obr. 4), čímž získáme další okrajovou podmínku. Hodnoty proměnné $y_{nl(k)}$, konstanty $m_{nl(k)}$, stejně jako síly $F_{v(k)}$ musí být pro k odpovídající závěsu rovny nule. V našem případě je závěs v místě $k=5$, je tedy nutné odstranit čtvrtý řádek a sloupec matice \mathbf{X}_{nl} a čtvrté prvky vektorů \mathbf{Y}_{nl} a \mathbf{P}_{nl} . V případě jiného umístění závěsu je nutné odstranit jiné řádky a sloupce. Tímto získáme matici rozměrech 8×8 prvků a vektory o 8 řádcích. Aby bylo možno matice příslušející nosnému lanu sečíst s maticemi příslušejícími trolejovému drátu a přistoupit tak ke konečnému řešení, je nutné do matic pro nosné lano vložit nulové prvky na místo, odpovídající pozici sběrače, tedy vždy doprostřed mezi 4. a 5. řádek a sloupec (viz 12). Zápis potom zní:

$$\mathbf{X}_{nl} = \mathbf{F}_{td} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{x_{nl1}} + \frac{1}{x_{nl2}} & -\frac{1}{x_{nl2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{x_{nl2}} & \frac{1}{x_{nl2}} + \frac{1}{x_{nl3}} & -\frac{1}{x_{nl3}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{x_{nl3}} & \frac{1}{x_{nl3}} + \frac{1}{x_{nl4}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{x_{nl5}} + \frac{1}{x_{nl6}} & 0 & -\frac{1}{x_{nl6}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{x_{nl6}} & 0 & \frac{1}{x_{nl6}} + \frac{1}{x_{nl7}} & -\frac{1}{x_{nl7}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{x_{nl7}} & \frac{1}{x_{nl7}} + \frac{1}{x_{nl8}} & -\frac{1}{x_{nl8}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{x_{nl8}} & \frac{1}{x_{nl8}} + \frac{1}{x_{nl9}} & -\frac{1}{x_{nl9}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{x_{nl9}} & \frac{1}{x_{nl9}} + \frac{1}{x_{nl10}} & -\frac{1}{x_{nl10}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ 0 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{P}_{nl} = \begin{bmatrix} -m_{nl2}g \\ -m_{nl3}g \\ -m_{nl4}g \\ -m_{nl6}g \\ 0 \\ -m_{nl7}g \\ -m_{nl8}g \\ -m_{nl9}g \\ -m_{nl10}g \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_{v2} \\ F_{v3} \\ F_{v4} \\ F_{v5} \\ 0 \\ F_{v6} \\ F_{v7} \\ F_{v8} \\ F_{v9} \end{bmatrix} \quad (16)$$

Nyní již lze sečíst matice pro nosné lano i trolejový drát. Touto operací dojde k eliminaci neznámých hodnot F_{vk} ve vektorech \mathbf{P}_{nl} a \mathbf{P}_{td} . Výpočet neznámého vektoru \mathbf{Y} se v Matlabu provede operací:

$$\mathbf{Y} = (\mathbf{X}_{nl} + \mathbf{X}_{td}) \setminus (\mathbf{P}_{nl} + \mathbf{P}_{td}) \quad (17)$$

Hledaným zdvihem trolejového drátu v místě sběrače y je prostřední prvek vektoru \mathbf{Y} . Výpočet tuhosti se poté provede podle vzorce (9).

5 Vytvoření algoritmu

Využití výše uvedených výpočtů nespočívá pouze v samotném zjišťování délky věšáků nebo tuhosti vedení. Především tuhost je základním vstupním parametrem dynamických simulací spolupůsobení sběrače s trolejovým vedením, kdy zvláště při vyšších rychlostech určuje spolu s dalšími veličinami tzv. rezonanční rychlosti, při kterých je chod sběrače nestabilní. Jedním

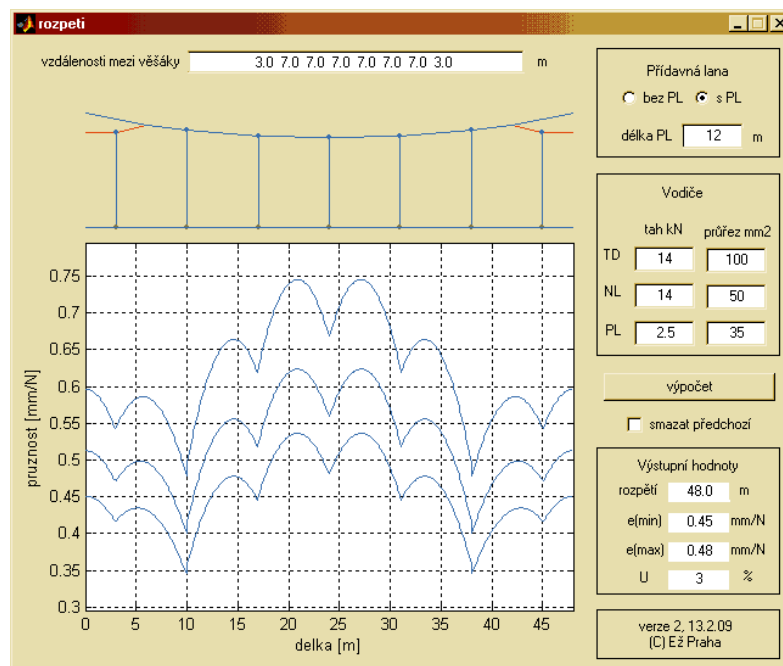
z požadavků tedy bylo pokud možno univerzální použití několika skriptů, do kterých bylo rozloženo vlastní řešení:

- skript zadávání údajů *zadejkonst.m*, umožňující snadné naplnění vstupních proměnných odpovídajícími daty pomocí jakéhokoliv textového editoru bez použití příkazové řádky Matlabu. Při použití uživatelského rozhraní je skript nahrazen tímto rozhraním;
- skript *konst.m*, jehož výstupem jsou vypočtené hodnoty tuhosti, kmitající hmotnosti a dalších parametrů pro dynamické simulace (průhyb trolejového drátu mezi věšáky, náhodné odchylky regulace) pro zvolený počet rozpětí nebo délku úseku, v němž se jízda simuluje. Pro zjištění tuhosti v průběhu jednotlivých rozpětí využívá skript funkce *bpl.m* a *spl.m*;
- funkce *bpl.m*, provádějící vlastní výpočet tuhosti pro vedení bez přídatných lan, jak bylo popsáno v kapitole 4;
- funkce *spl.m*, provádějící obdobný výpočet pro vedení s přídatnými lany;
- skript *vesaky.m*, provádějící výpočet délky věšáků jak bylo popsáno v kapitole 3. Ve variantách *vesaky3* a *vesaky4* jsou zohledněny i další vstupní parametry (vliv traťových oblouků, předprůhyb atd.)

Skripty a funkce využívají pouze běžné programové konstrukce (cykly, rozhodovací bloky) a vestavěné funkce Matlabu. Především jsou použity operace s maticemi (generování nulové matice, vkládání řádků, výběr podmatic). Skripty *konst.m*, *bpl.m*, *spl.m* a *vesaky.m* jsou přílohou tohoto příspěvku.

6 Vytvoření uživatelského rozhraní

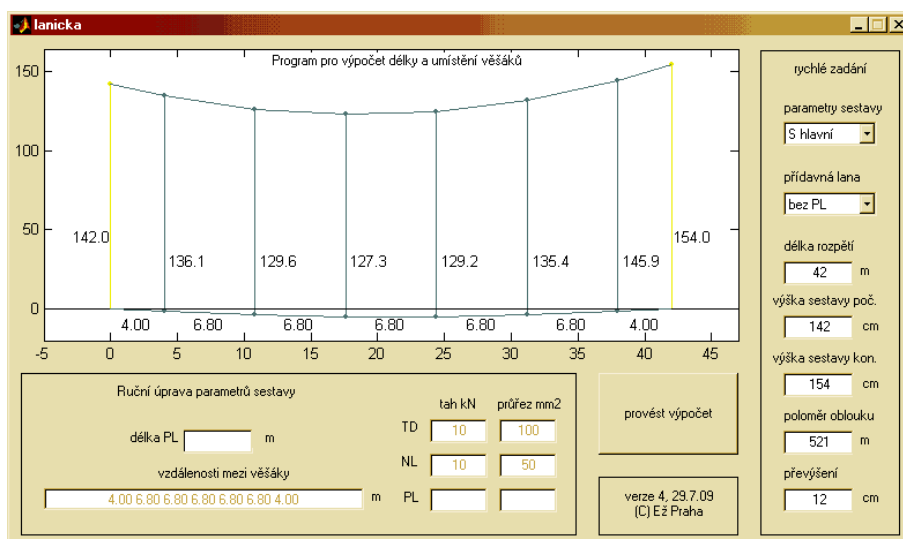
Úkolem uživatelského rozhraní je především umožnit snadné a intuitivní zadávání vstupních údajů, včetně omezení počtu chyb při zadávání. Byla vytvořena dvě uživatelská rozhraní: pro výpočet tuhosti/pružnosti vedení a pro výpočet délky věšáků. Výhodou Matlabu pro vytváření těchto rozhraní byla především plná integrace s dříve vytvořenými skripty a funkcemi, které nebylo nutné nijak měnit, snadné vkládání a úpravy rozložení ovládacích prvků v grafickém editoru GUIDE, poměrně snadné programování jednotlivých prvků a plná kontrola nad nimi pomocí skriptu, a v neposlední řadě úspora finanční, neboť nebylo nutné pořizovat žádné další programové vybavení. Obě grafická rozhraní předpokládají obeznámeného uživatele, ověřování správnosti zadaných údajů tedy mohlo být omezeno na nejnutnější míru (kontrola, zda údaje jsou vůbec zadány a zda jsou číselné).



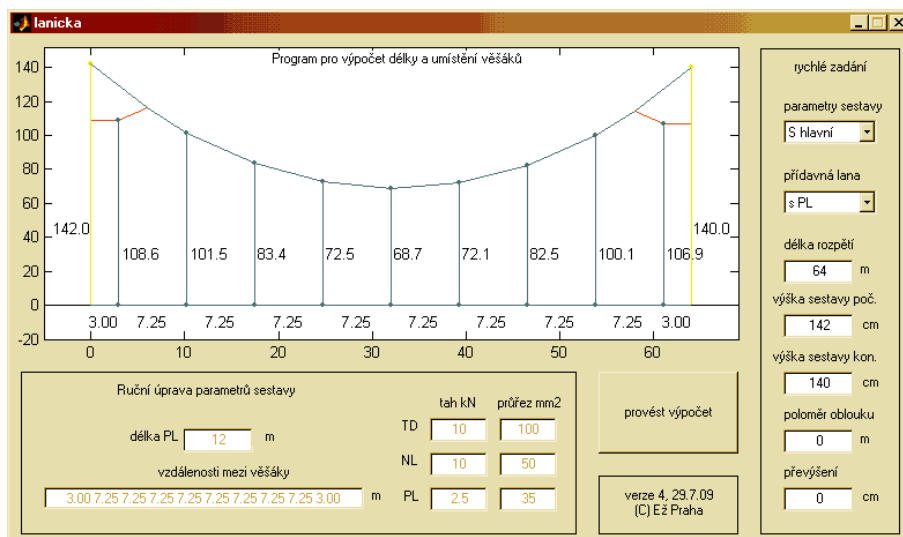
Obr. 5: Srovnání pružnosti vedení typu „S“ při tazích vodičů 10, 12 a 14 kN

Rozhraní *rozpeti* (obr. 5), tvořené soubory *rozpeti.fig* a *rozpeti.m* umožňuje výpočet a grafické zobrazení průběhu tuhosti trolejových vedení s různými parametry. Zadat je možné tahy a průřezy vodičů a přidavného lana (délková hmotnost je vypočtena z těchto průřezů), geometrii rozpětí (jeho délku a umístění věšáků, délku přidavného lana). Pomocí políčka „Smazat předchozí“ lze zobrazit buď aktuální, nebo ponechat i předešlé výsledky výpočtu, což umožňuje snadnou analýzu vlivu vstupních parametrů, rozmístění věšáků, přidavných lan atd. na výsledný průběh. Pro přehlednost je nad grafem průběhu tuhosti schematicky zobrazena i praktická realizace požadovaného rozpětí. Číselnými výstupy grafického rozhraní jsou délka rozpětí a vypočítané hodnoty tří základních parametrů pružnosti podle kodexů UIC: hodnoty pružnosti v místě závěsu e_{min} , uprostřed rozpětí e_{max} a z nich vypočítaná nerovnoměrnost pružnosti U . Uživatelské rozhraní *rozpeti* je přílohou tohoto příspěvku. Po zkopírování všech příložených souborů do jednoho adresáře je lze spustit v Matlabu verze 6 a vyšší.

Rozhraní *lanicka* (obr. 6, 7), tvořené soubory *lanicka.fig* a *lanicka.m* umožňuje jak ve fázi projekce a technické přípravy, tak především přímo na staveništi operativně zjišťovat potřebné délky věšáků při zohlednění všech relevantních vlivů. Tahy a průřezy vodičů, stejně jako nutný počet věšáků jsou vypočítány automaticky podle uživatelem zvoleného typu sestavy trolejového vedení pomocí rozbalovací nabídky („S“ hlavní, vedlejší, „J“ hlavní, vedlejší, bez nebo s přidavnými lany). V případě atypických případů je možné zvolit i ruční zadání. Číselně je ze strany uživatele nutno zadat výšky sestavy u obou závěsů a délku rozpětí (změří se na trati po montáži konzol), případně poloměr oblouku a převýšení vnější kolejnice (má vliv na požadovaný průběh regulace trolejového drátu). Výstupem je grafické i číselné vyjádření údajů nutných pro výrobu a montáž věšáků – jejich délek a rozestupů.



Obr. 6: Výpočet délek věšáků krátkého rozpětí v oblouku



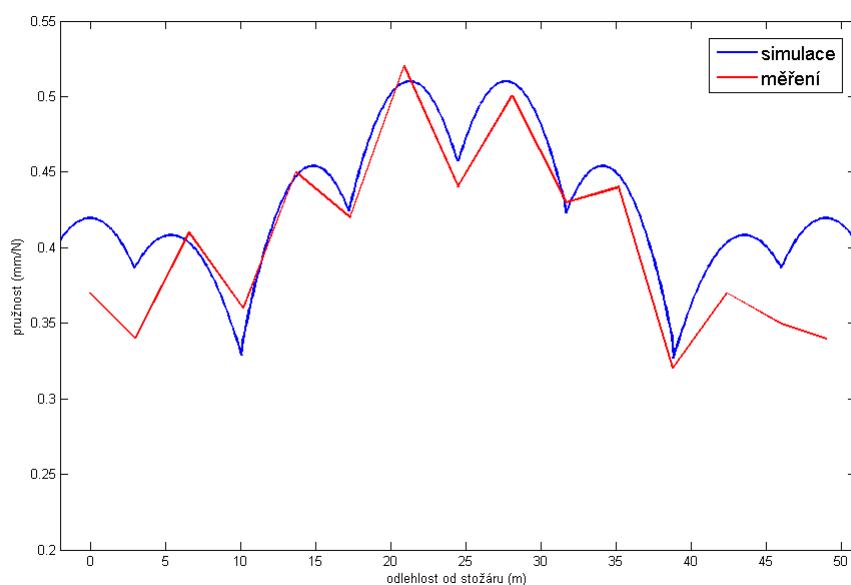
Obr. 7: Výpočet délek věšáků dlouhého rozpětí v přímé

7 Ověřování a dosažená přesnost výpočtů

Pro ověření přesnosti výpočtů byly jeho výsledky porovnávány s výsledky následujících měření:

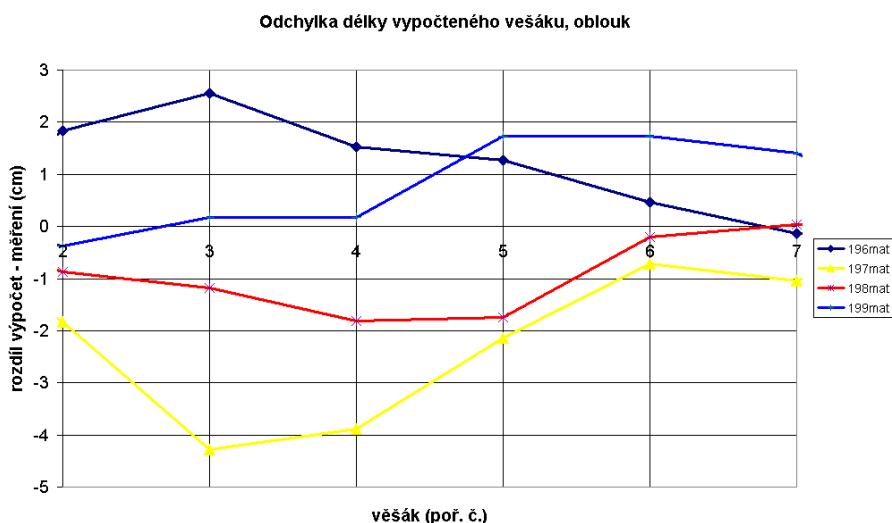
- měření pružnosti TV typu „J“, úsek Studénka – Jistebník, 2004;
- měření pružnosti TV typu „S“, úsek Břeclav – Podivín, 2004;
- měření pružnosti TV typu „J“, žst. Červenka, 2008;
- měření pružnosti TV typu „S“, úsek České Velenice – Nové Hrady, 2009;
- měření délky věšáků TV typu „S“, úsek České Velenice – Nové Hrady, 2009;
- měření délky věšáků TV typu „J“, žst. Šumperk, 2009.

Výpočty tuhosti/pružnosti zcela prokázaly požadovanou přesnost do 10%. V přímých úsecích a ve větší vzdálenosti od stožárů je dosahovaná přesnost srovnatelná s nepřesností měření, tj. do 5% (viz obr. 7). K větším odchylkám až 20 % dochází u prvního věšáku a u závěsu, především v obloucích trati s malými poloměry. Tyto odchylky jsou způsobeny v modelu nezohledněnou a obtížně definovatelnou svislou složkou silového působení bočního držáku, která jednak přizdvihuje trolejový drát, jednak způsobuje zvětšení tuhosti.

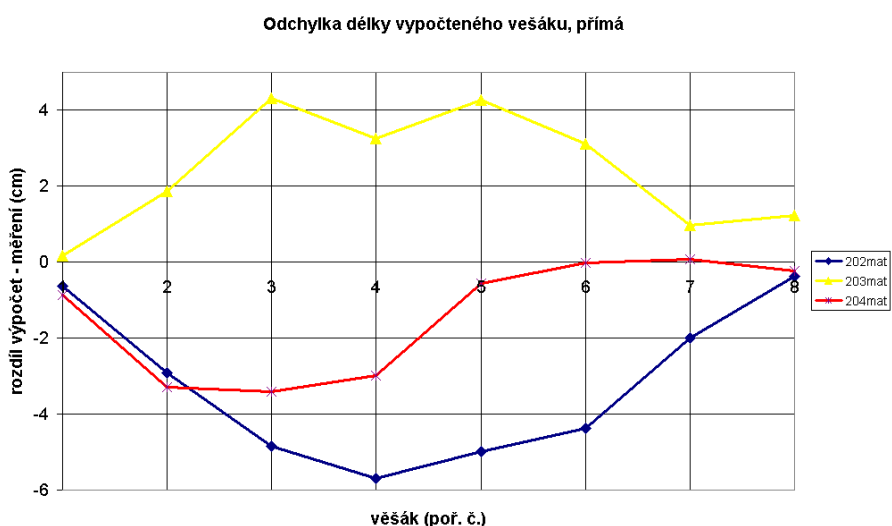


Obr. 8: Srovnání měření a výpočtu pro pružnost vedení

U výpočtů délky věšáků je požadovaná přesnost 0,4 % – 1 %, (2 cm – 5,5 cm), přičemž vyšší hodnota přesnosti je požadována v blízkosti závěsu a nižší hodnota uprostřed rozpětí. Výsledky prvních výpočtů se tak ukázaly jako nedostatečně přesné, opět především v tratových obloucích. Po zavedení zdokonalených postupů (viz vzorec (8)) a po provedení korekce na regulaci trolejového drátu v obloucích s převýšením je již přesnost dostatečná. Na obr. 9 a 10 jsou znázorněny odchylky délky vypočítaných a změřených věšáků.



Obr. 9: Srovnání měření a výpočtu pro délky vešáků



Obr. 10: Srovnání měření a výpočtu pro délky vešáků

Vzhledem ke kolísání odchylek do kladné i záporné oblasti lze předpokládat, že odchylky nejsou způsobeny chybou výpočtové metody, ale náhodnou nepřesností regulace měřeného vedení spolu s nepřesnostmi měření. Aritmetický průměr chyby délky vešáku přes více rozpětí, jak ukazuje následující tabulka, rychle klesá na podstatně nižší hodnoty.

rozpětí	průměrná odchylka v rozpětí (cm)			
	S oblouk	S přímá	J oblouk	J přímá
1.	1,25	-3,22	-1,69	-1,34
2.	-2,32	2,40	-0,91	-1,61
3.	-0,96	-1,41	-0,02	-0,17
4.	0,81	---	0,60	-2,51
průměr	-0,30	-0,75	-0,51	-1,41

8 Závěr

Předložený příspěvek prokazuje účinnost a dostatečnou přesnost výpočtových metod v oblasti vývoje i realizace trolejových vedení. Především výpočet délky věšáků může přinést značné časové úspory a také odstranění jedné z nejneoblíbenějších prací při montáži – zkusmé regulaci výšky trolejového drátu. Vývoj výpočtových postupů je také nezbytný pro budoucí realizaci vysokorychlostních trolejových vedení, u kterých zkusmá regulace vykazuje nedostatečnou přesnost a reprodukovatelnost výsledků. V nejbližší době by měly být EŽ Praha a. s. realizovány první zkušební úseky tratí s určováním délky uvedenou výpočtovou metodou.

Prokázáno je též vhodné použití systému Matlab, který umožnil v jednom prostředí provést všechny nutné kroky – od řešení úlohy na nejnižší matematické úrovni, přes značné zjednodušení maticovými operacemi a automatizaci výpočtu pomocí skriptů a funkcí, až po vytvoření komfortního uživatelského rozhraní.

Literatura

- [1] Krčma, T. *Určování délky věšáků výpočtem*. Konference Dny nové techniky EŽ Praha, Jablonné nad Orlicí, 3. – 4. 2009.
- [2] Kießling, F., Puschmann, R., Schmieder, A. *Contact Lines for Electric Railways*. Siemens AG, Berlin, München, 2001.
- [3] Němec, J. *Trolejová vedení železniční*. Nakladatelství dopravy a spojů, Praha, 1961.
- [4] *Frage A 84. Verhalten der Stromabnehmer und Fahrleitungen bei Geschwindigkeiten über 160 km/h (Nr. 1 – 11)*. ORE, Utrecht 1966 – 1970.
- [5] Interní dokumentace firmy Elektrizace železnic Praha a. s.

Tomáš Krčma

Elektrizace železnic Praha a. s., náměstí Hrdinů 1693/4a, 140 00 Praha 4 – Nusle
tel.: +420 296 500 506, e-mail: tomas.krcma@elzel.cz