

# Simulace difrakčních jevů s použitím MATLABU

*Antonín Mikš, Jiří Novák*

katedra fyziky, Fakulta stavební ČVUT Praha

## 1. Úvod

Difrakční jevy hrají velmi důležitou úlohu v oblasti optického zobrazování. Difrakční teorie optického zobrazování přihlíží k vlnovým vlastnostem světla a ke konečným rozměrům optických soustav při zobrazování, na rozdíl od geometrické optiky, pomocí které nelze difrakční jevy vysvětlit. Při zobrazování bodu reálnou optickou soustavou bez aberací nebude obrazem bod, ale difrakční obrazec s prostorovým rozdělením energie. Teorie difrakce se především uplatňuje při hodnocení kvality optického zobrazení [2], studiu difraktivních procesů na difrakčních strukturách (mřížkách) a v aplikacích v oblasti holografie a difraktivní optiky. Difrakční jevy můžeme simulovat též pomocí počítače. Jako vhodný prostředek pro tuto počítačovou simulaci se jeví systém MATLAB, který obsahuje celou řadu vhodných prostředků pro simulaci a vizualizaci difrakčních jevů. V článku je ukázáno několik případů aplikace MATLABU v oblasti difrakce vlnových polí.

## 2. Difrakce světla

Difrakcí budeme rozumět ty odchylky v chování vlnových polí, které nemohou být popsány pomocí zákonů geometrické optiky. Rigorózní řešení difrakce bylo získáno jen v několika málo jednoduchých případech (difrakce na klínu, válci, kouli, polorovině apod.). Bližší rozbor vysokofrekvenčních asymptotik těchto řešení ukázal, že k narušení zákonů geometrické optiky dochází jen v úzkých přechodových zónách, kde se vytváří difrakční pole. Další šíření těchto polí, ve větších vzdálenostech od míst jejich vzniku, je opět popsáno zákony geometrické optiky. Existují dva typy přechodových zón, ve kterých nejsou použitelné zákony geometrické optiky. Prvý typ - zóny přiléhající k povrchům těles na kterých nastává difrakce (např. okolí hran). V těchto zónách se vytváří okrajové difrakční vlny. Zóny druhého typu se nacházejí v prostoru, v místech vzdálených od těles na kterých nastává difrakce (např. okolí kaustik).

Předpokládejme, že vlastnosti vlnového pole budou dostatečně přesně popsány jednou skalární funkcí, kterou může být např. složka vektoru elektrické nebo magnetické intenzity. Předpokládejme přitom, že ostatní složky mohou být nezávisle zkoumány stejným způsobem. Zcela tedy ignorujeme ten fakt, že jednotlivé složky vektorů elektromagnetického pole jsou vázány Maxwellovými rovnicemi a nelze je proto zkoumat nezávisle. Experimenty však ukazují, že skalární teorie difrakce dává obdivuhodně přesné výsledky jsou-li splněny následující podmínky:

- charakteristické rozměry těles na kterých nastává difrakce jsou mnohonásobně větší než je vlnová délka záření
- difrakční jevy jsou zkoumány v dostatečně velkých vzdálenostech od těles, na kterých nastává difrakce.

Ta skutečnost, že pomocí skalární teorie difrakce dostáváme přesné výsledky má velký význam zejména v teorii optického zobrazení, kde pracujeme s přirozeným (nepolarizovaným) zářením a zajímá nás především jeho intenzita. Také experimenty v této oblasti jsou ve velmi dobrém souhlasu se skalární teorií difrakčního zobrazení.

Uvažujme nyní skalární vlnové pole, které je v libovolném bodě  $M$  prostoru a časovém okamžiku  $t$  popsáno skalární funkcí  $V(M,t)$ . Jak je známo z teorie elektromagnetického pole

splňuje funkce  $V(M,t)$  vlnovou rovnicí

$$\nabla^2 V(M,t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 V(M,t)}{\partial t^2}, \quad (2.1)$$

kde značí  $v$  fázovou rychlost vlnění a  $\nabla^2$  Laplaceův operátor. Hledejme nyní řešení vlnové rovnice (2.1) ve tvaru

$$V(M,t) = U(M)e^{-i\omega t}, \quad (2.2)$$

kde  $\omega = 2\pi\nu$ , přičemž  $\nu$  je frekvence záření. Funkce  $U(M)$  je pak řešením Helmholtzovy rovnice

$$\nabla^2 U(M) + k^2 U(M) = 0, \quad (2.3)$$

kde  $k = \omega/v = 2\pi/\lambda$ , přičemž  $\lambda$  je vlnová délka záření v daném prostředí. Řešení difrakční úlohy spočívá v řešení Helmholtzovy rovnice (2.3), kde funkce  $U(M)$  splňuje vhodné okrajové podmínky

$$\left( a_1 U(M) + a_2 \frac{\partial U(M)}{\partial n} \right)_S = f(M)$$

na ploše  $S$  obklopující oblast, v níž vyšetřujeme dané pole,  $n$  značí normálu k ploše  $S$ ,  $a_1 = a_1(M)$ ,  $a_2 = a_2(M)$  a  $f(M)$  jsou spojité funkce na  $S$ , přičemž

$$a_1 \geq 0, \quad a_2 \geq 0 \quad \text{a} \quad a_1^2 + a_2^2 \neq 0.$$

Řešením rovnice (2.3) pomocí Greenovy funkce získáme pro funkci  $U$  řešení

$$U(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[ G(M,P) \frac{\partial U(M)}{\partial n} - U(M) \frac{\partial G(M,P)}{\partial n} \right] dS. \quad (2.4)$$

Tento vztah nám umožňuje určit stav pole v libovolném bodě  $P$  uvnitř oblasti uzavřené plochou  $S$ , známe-li stav pole na této hraniční ploše a Greenovu funkci  $G$ .

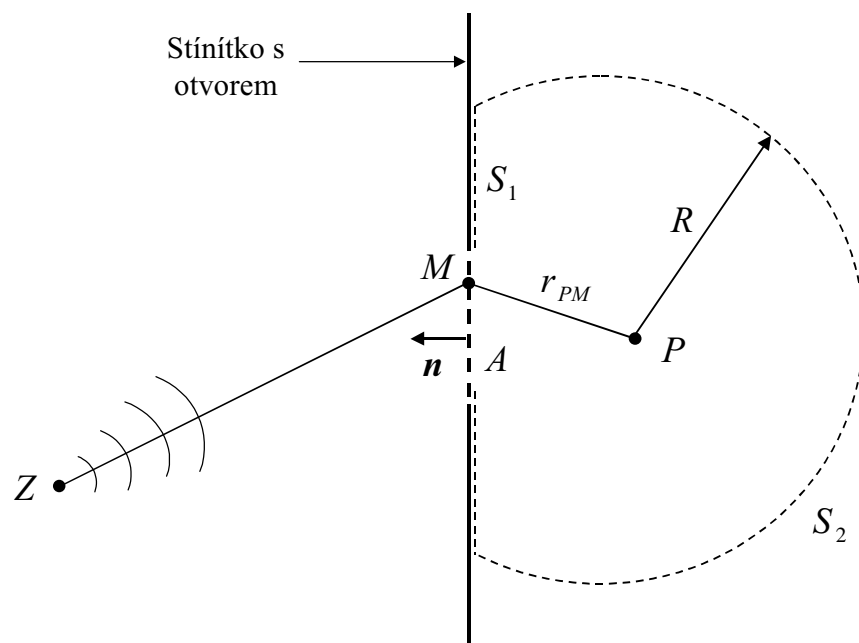
## 2.1 Kirchhoffovo řešení

Kirchhoff jako první předložil vyhovující matematické řešení difrakční úlohy na rovinném stínítku s otvorem [1,2]. Vycházel ze vztahu (2.4) a plochu  $S$  volil složenou ze dvou částí  $S_1$  a  $S_2$ , jak je znázorněno na **obr.1**. Plocha  $S_1$  se těsně přimyká k rovině stínítka a plocha  $S_2$  je částí kulové plochy se středem v bodě  $P$ , ve kterém chceme určit stav pole. Greenova funkce  $G(M,P)$  je zvolena ve tvaru kulové vlny

$$G(M,P) = \frac{\exp(ikr_{PM})}{r_{PM}}, \quad (2.5)$$

kde  $r_{PM}$  značí vzdálenost bodu  $P$  od bodu  $M$ . Kirchhoff učinil následující předpoklady o hraničních podmínkách naší difrakční úlohy:

- V otvoru  $A$  má pole  $U$  a jeho derivace  $\partial U/\partial n$  stejnou hodnotu jako by měly, kdyby stínítko v daném místě nebylo.
- Na té části plochy  $S_1$ , která leží vně otvoru  $A$  je pole  $U$  a jeho derivace  $\partial U/\partial n$  identicky rovny nule.



Obr.1

Přijmeme-li tyto hraniční podmínky, potom dostaneme výsledný vztah pro určení pole v bodě  $P$ , platí

$$U(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_A \left[ G(M,P) \frac{\partial U(M)}{\partial n} - U(M) \frac{\partial G(M,P)}{\partial n} \right] dA, \quad (2.6)$$

kde integraci provádíme přes plochu  $A$  otvoru stínítka. Kirchhoffovo řešení difrakční úlohy v sobě však obsahuje vnitřní rozpornost, která vzniká v důsledku Kirchhoffových hraničních podmínek. Získané řešení není konzistentní, neboť pole a jeho derivace nenabývají na hranici těch hodnot, které jsme dosadili ve formě hraničních podmínek. Z teorie diferenciálních rovnic je známo, že jsou-li funkce  $U$  a  $\partial U/\partial n$  rovny nule na nějaké části plochy, potom je  $U$  rovna nule v celém prostoru. Kirchhoffovy hraniční podmínky si tedy vzájemně odporují. I přes rozpornost teorie dává Kirchhoffovo řešení obdivuhodně přesné výsledky a souhlas s experimentem.

## 2.2. Sommerfeldovo řešení

Potíže s hraničními podmínkami poněkud zmírnil Sommerfeld a to vhodnou volbou Greenovy funkce. Požadoval, aby na ploše  $S_1$  byla buď Greenova funkce nulová

$$G(M,P)|_{S_1} = 0, \quad (2.7)$$

nebo aby byla nulová její derivace

$$\frac{\partial G(M,P)}{\partial n} \Big|_{S_1} = 0. \quad (2.8)$$

Užitím vztahu (2.4) potom pro Greenovu funkci splňující hraniční podmínku (2.7) resp. (2.8) dostáváme pro stav pole v bodě  $P$  vztah

$$U(P) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} U(M) \frac{\partial G(M,P)}{\partial n} dS_1 \quad \text{resp.} \quad U(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} G(M,P) \frac{\partial U(M)}{\partial n} dS_1 \quad (2.9)$$

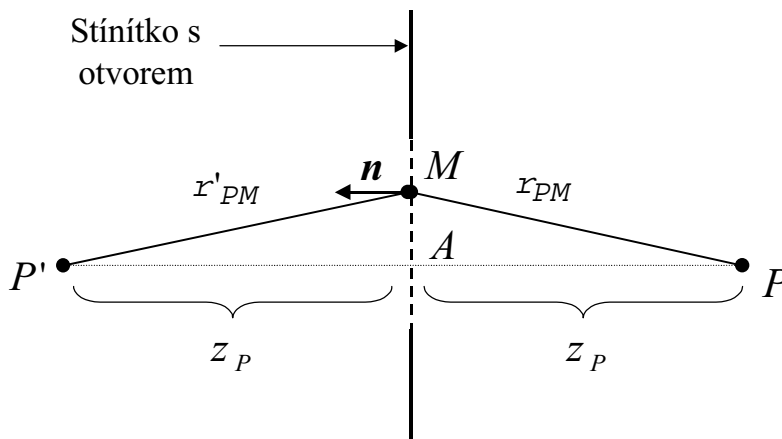
Sommerfeld ukázal, že Greenova funkce s požadovanými vlastnostmi existuje. V případě rovinného stínítka má Greenova funkce splňující hraniční podmínku (2.7) resp. (2.8) tvar

$$G(M,P) = \frac{\exp(ikr_{PM})}{r_{PM}} - \frac{\exp(ikr'_{PM})}{r'_{PM}}, \quad (2.10a)$$

resp.

$$G(M,P) = \frac{\exp(ikr_{PM})}{r_{PM}} + \frac{\exp(ikr'_{PM})}{r'_{PM}}, \quad (2.10b)$$

kde  $r_{PM}$  je vzdálenost bodu  $P(x_P, y_P, z_P)$  od bodu  $M(x_M, y_M, z_M)$  a  $r'_{PM}$  je vzdálenost bodu  $P'(x_P, y_P, -z_P)$  od bodu  $M$ , jak je patrné z **obr.2**. Bod  $P'$  je zrcadlovým obrazem bodu  $P$  v rovině stínítka. V dalším se budeme zabývat pouze řešením s Greenovou funkcí ve tvaru (2.10a).



**Obr.2**

Po několika úpravách dostáváme řešení

$$U(P) = -\frac{i}{\lambda} \iint_{S_1} U(M) \frac{\exp(ikr_{PM})}{r_{PM}} \cos(\vec{n}, \vec{r}_{PM}) dS_1. \quad (2.11)$$

Přijmeme nyní následující *hraniční podmínky*:

- V otvoru  $A$  má pole  $U$  stejnou hodnotu jako by mělo, kdyby stínítka v daném místě nebylo.
- Na té části  $S_1$ , která leží vně otvoru  $A$  je pole  $U$  identicky rovno nule.

Vztah (2.11) poté nabývá tvar

$$U(P) = -\frac{i}{\lambda} \iint_A U(M) \frac{\exp(ikr_{PM})}{r_{PM}} \cos(\vec{n}, \vec{r}_{PM}) dA, \quad (2.12)$$

kde integraci provádíme přes plochu  $A$  otvoru stínítka. Vztah (2.12) je *Sommerfeldovým řešením difrakce na otvoru (Sommerfeldův difrakční integrál)*. Tento vztah nám umožňuje určit stav pole  $U(P)$  v libovolném bodě  $P$  oblasti omezené plochou  $S$ , je-li známo pole  $U(M)$  na této ploše.

### 3. Aproximativní řešení difrakce

Při řešení praktických problémů difrakce nám často geometrie vyšetřované situace dovoluje použít určité aproximace, usnadňující výpočet difrakčního integrálu. Zabývejme se nyní dvěma nejdůležitějšími případy a to Fresnelovou a Fraunhoferovou aproximací difrakčního integrálu [1,2].

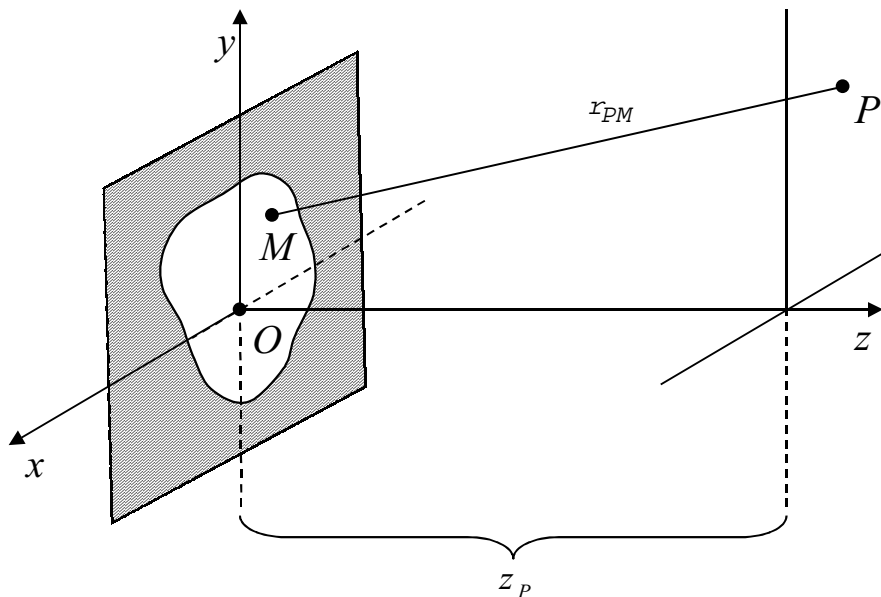
#### 3.1. Fresnelova aproximace

Postup, kterým dospějeme k aproximativnímu řešení difrakčního problému si ukážeme na případě Sommerfeldova difrakčního integrálu, který se při praktickém řešení difrakčních úloh nejčastěji používá. Uvážíme-li, že (**obr.3**)

$$r_{PM} \approx z_P + \frac{(x_P - x_M)^2 + (y_P - y_M)^2}{2z_P} \quad \text{a} \quad \cos(\vec{n}, \vec{r}_{PM}) \approx 1 ,$$

potom můžeme (za předpokladu  $kr_{MP} \gg 1$ ), pro praxi s dostatečnou přesností, aproximovat vztah (2.12) vztahem

$$U(P) = -\frac{i}{\lambda} \frac{\exp(ikz_P)}{z_P} \iint_A U(M) \exp\left\{\frac{ik}{2z_P} [(x_P - x_M)^2 + (y_P - y_M)^2]\right\} dx_M dy_M. \quad (2.13)$$



Obr.3

Vztah (2.13) nám potom představuje *Fresnelovu aproximaci Sommerfeldova difrakčního integrálu*. Vztah (2.13) můžeme ještě dále upravit následujícím způsobem

$$U(P) = C \iint_A U(M) \exp\left[\frac{ik}{2z_P} (x_M^2 + y_M^2)\right] \exp\left[-\frac{ik}{z_P} (x_P x_M + y_P y_M)\right] dx_M dy_M, \quad (2.14)$$

kde

$$C = -\frac{i}{\lambda} \frac{\exp(ikz_P)}{z_P} \exp\left[\frac{ik}{2z_P} (x_P^2 + y_P^2)\right]. \quad (2.15)$$

### 3.2. Fraunhoferova aproximace

Můžeme-li (pokud nám to vyšetřovaná situace dovoluje) položit přibližně

$$\exp\left[\frac{ik}{2z_p}(x_M^2 + y_M^2)\right] \approx 1, \quad (2.16a)$$

nebo

$$U(M) = T(M) \exp\left[-\frac{ik}{2z_p}(x_M^2 + y_M^2)\right], \quad (2.16b)$$

docházíme k tzv. *Fraunhoferově aproximaci difrakčního integrálu*. První situace nastává v případě, kdy charakteristické rozměry otvoru, na kterém nastává difrakce, jsou mnohem menší než je vzdálenost  $z_p$  vyšetřovaného bodu od otvoru. Druhá situace nastává v případě, kdy na otvoru stínítka dochází k difrakci konvergentní kulové (nebo přibližně kulové) vlny se středem v bodě  $P$  nebo v jeho bezprostřední blízkosti. Funkce  $T(M)$  charakterizuje vlastnosti této vlny v rovině otvoru stínítka. Difrakční integrál ve *Fraunhoferově aproximaci* má v prvním případě tvar

$$U(P) = C \iint_A U(M) \exp\left[-\frac{ik}{z_p}(x_p x_M + y_p y_M)\right] dx_M dy_M, \quad (2.17a)$$

a v druhém případě platí

$$U(P) = C \iint_A T(M) \exp\left[-\frac{ik}{z_p}(x_p x_M + y_p y_M)\right] dx_M dy_M, \quad (2.17b)$$

kde  $C$  je dáno vztahem (2.15). Označíme-li

$$u = x_p/z_p \quad \text{a} \quad v = y_p/z_p, \quad (2.18)$$

potom můžeme vztahy (2.17) psát ve tvaru

$$U(P) = C \iint_A U(M) \exp[-ik(ux_M + vy_M)] dx_M dy_M. \quad (2.19a)$$

$$U(P) = C \iint_A T(M) \exp[-ik(ux_M + vy_M)] dx_M dy_M. \quad (2.19b)$$

Vidíme, že v rámci platnosti Fraunhoferovy aproximace je *pole*  $U(P)$  *úměrné Fourierově transformaci pole v otvoru stínítka*. Nyní si uvedeme několik zajímavých příkladů difrakce světla na různých typech otvorů.

#### a) Fraunhoferova difrakce na obdélníkovém otvoru

Předpokládejme, že počátek souřadné soustavy se nachází ve středu obdélníkového otvoru o stranách  $2a$  a  $2b$  a že strany obdélníka jsou rovnoběžné s osami souřadnic. Dále předpokládejme, že pole v otvoru stínítka je konstantní, tj.  $U(M) = K$ , kde  $K$  je konstanta. Potom dosazením a integrací vztahu (2.19) dostáváme

$$U(P) = CK(4ab) \frac{\sin(kua)}{kua} \frac{\sin(kvb)}{kvb}. \quad (2.20)$$

Pro intenzitu pole  $I(P)$  platí

$$I(P) = I(0) \left( \frac{\sin(kua)}{kua} \right)^2 \left( \frac{\sin(kvb)}{kvb} \right)^2, \quad (2.21)$$

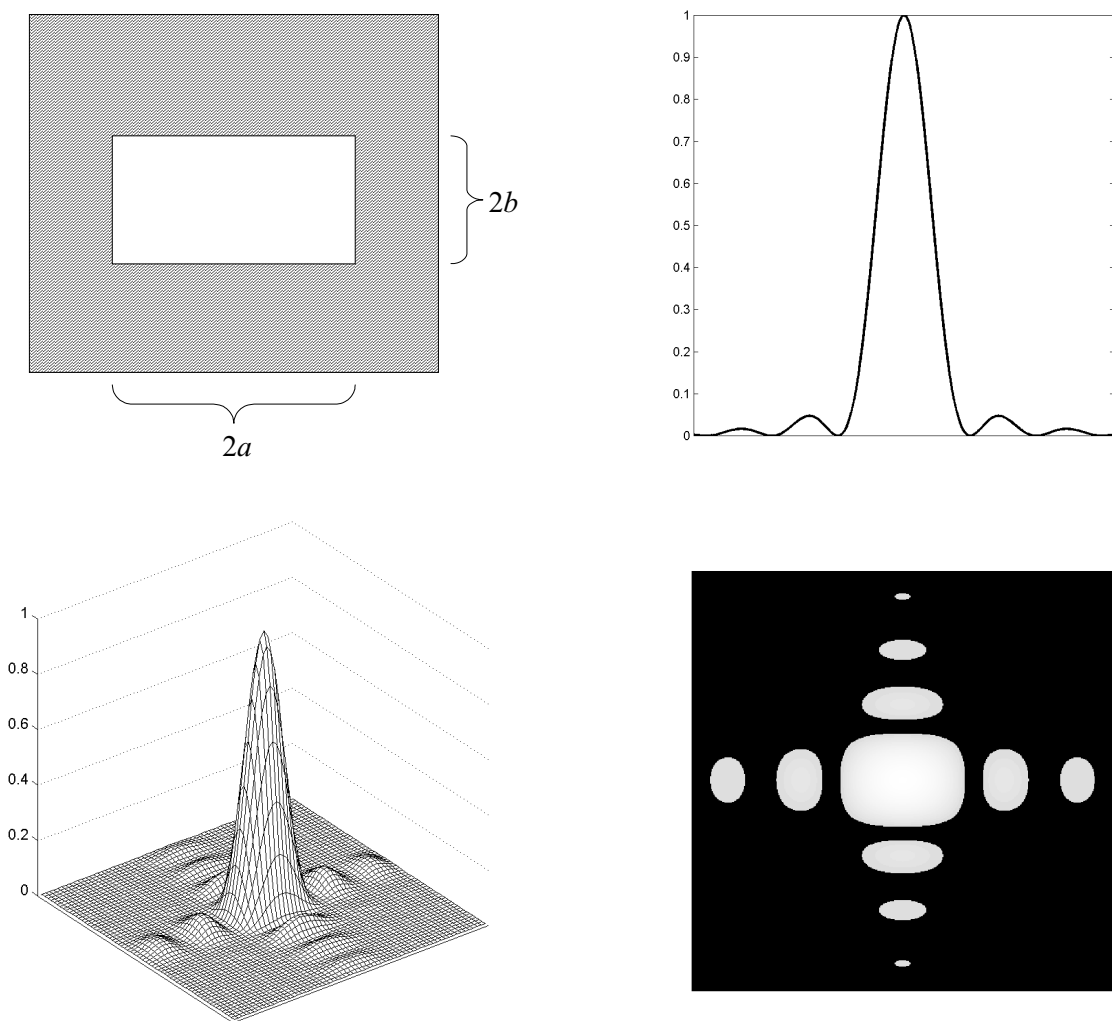
kde

$$I(0) = \frac{K^2 (4ab)^2}{\lambda^2 z_p^2}$$

značí intenzitu pro  $u = 0$  a  $v = 0$ . Intenzita nabývá nulových hodnot pro

$$kua = \pm n\pi, \quad kvb = \pm m\pi, \quad m, n = 1, 2, 3, \dots$$

Na **obr.4** je znázorněno rozdělení normované intenzity v případě Fraunhoferovy difrakce na obdélníkovém otvoru.



**Obr.4**

**b) Fraunhoferova difrakce na kruhovém a eliptickém otvoru**

Předpokládejme nyní, že otvor ve stínítku je kruhový o poloměru  $a$  a střed souřadné soustavy volme ve středu kruhového otvoru. Zavedme nyní v rovině stínítka polární souřadnice  $(r, \varphi)$  vztahy

$$x_M = r \cos \varphi, \quad y_M = r \sin \varphi$$

a v rovině, v níž chceme vyšetřovat difrakční jev zavedme polární souřadnice  $(\rho, \psi)$  vztahy

$$u = x_P / z_P = \rho \cos \psi, \quad v = y_P / z_P = \rho \sin \psi.$$

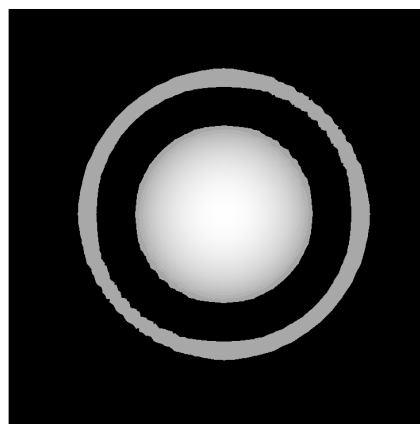
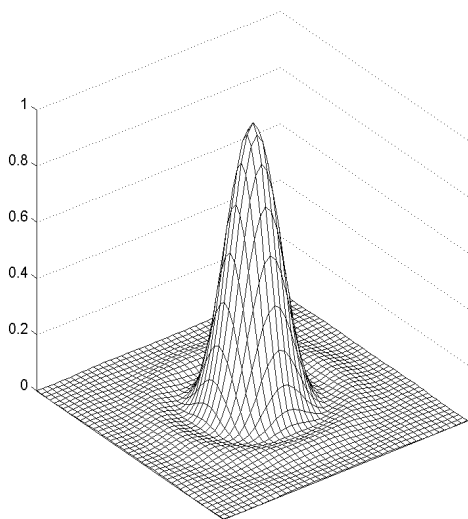
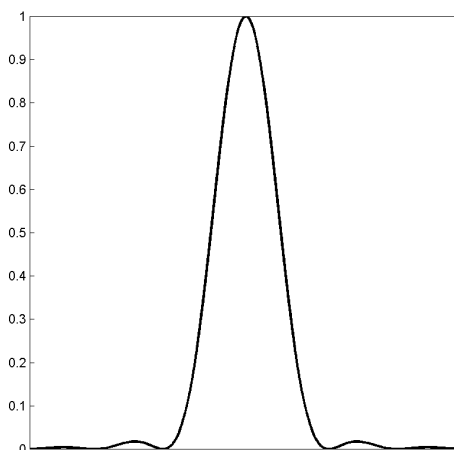
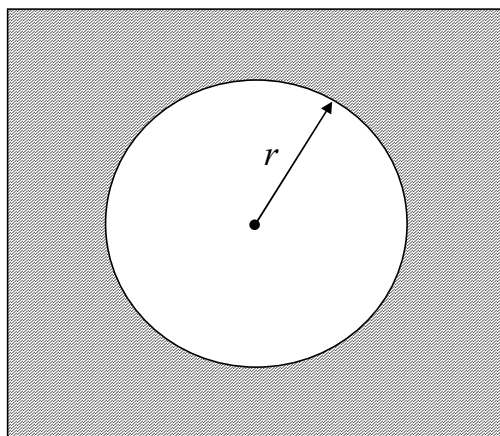
Dále předpokládejme, že pole v otvoru stínítka je konstantní, tj.  $U(M) = K$ , kde  $K$  je konstanta. Potom dosazením a integrací vztahu (2.19) dostáváme

$$U(P) = CK(\pi a^2) \frac{2J_1(ka\rho)}{ka\rho}. \quad (2.22)$$

Pro intenzitu pole  $I(P)$  potom dostáváme

$$I(P) = U(P)U^*(P) = I(0) \left[ \frac{2J_1(ka\rho)}{ka\rho} \right]^2, \quad (2.23)$$

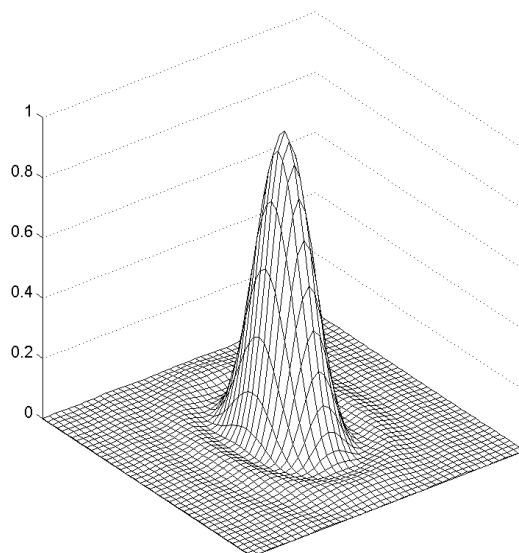
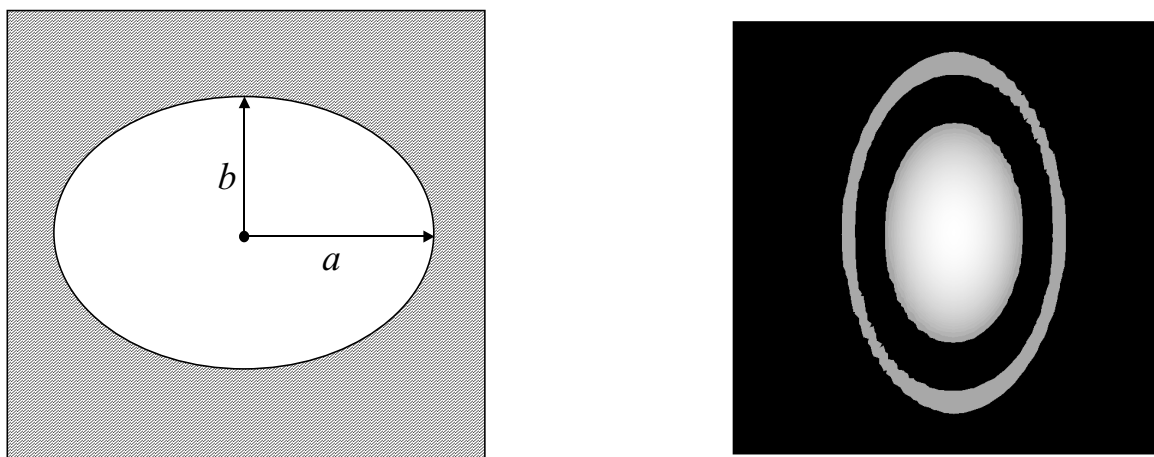
kde jsme označili  $I(0) = \frac{K^2(\pi a^2)^2}{\lambda^2 z_P^2}$ .



Obr.5



Na **obr.5** je znázorněno rozdělení normované intenzity v případě Fraunhoferovy difrakce na kruhovém otvoru. Intenzita je rovna nule v místech, pro která platí  $J_1(ka\rho) = 0$ .

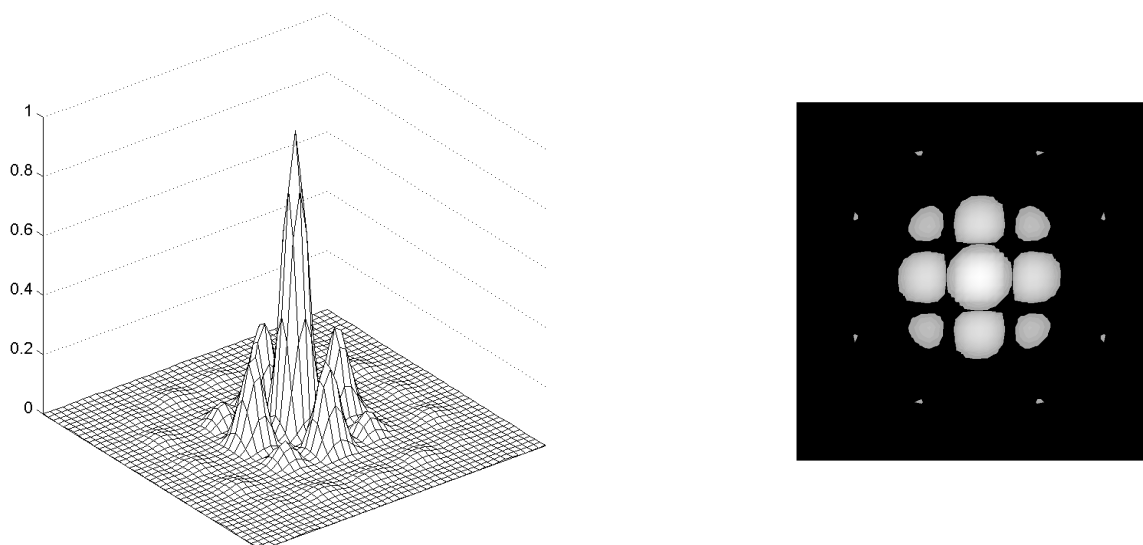


**Obr.6**

Pro zajímavost je na **obr.6** znázorněno rozdělení normované intenzity difrakčního pole v případě Fraunhoferovy difrakce na eliptickém otvoru. Je vidět, že difrakční obrazec se protáhne v jednom směru.

### c) Fraunhoferova difrakce na obecné apertuře

Jak již bylo poznamenáno je v rámci platnosti Fraunhoferovy aproximace difrakce pole  $U(P)$  v rovině pozorování za stínítkem úměrné Fourierově transformaci pole v otvoru stínítka, tj. rozdělení intenzity difrakčního pole v rovině pozorování za stínítkem můžeme jednoduše určit pomocí rychlé Fourierovy transformace pole v rovině otvoru. S pomocí výpočetních a vizualizačních prvků MATLABU tak lze získat difrakční pole vzniklé průchodem stínítkem s obecným otvorem či sadou otvorů. Na **obr.7** je jako příklad znázorněna situace difrakce na stínítku s několika kruhovými otvory.



**Obr.7**

### **3. Závěr**

Byla uvedena podrobná skalární teorie difrakce vlnového pole spolu s aproximativními řešeními difrakce (Fresnelova a Fraunhoferova aproximace), které jsou vhodné pro modelování difrakčního pole. Teoretická analýza a simulace difrakčního pole byla názorně demonstrována pomocí systému MATLAB na několika případech rovinného stínítka s různými typy otvorů a to obdélníkového, kruhového, eliptického a obecného otvoru. Jak je z předložených ukázek patrné, je možno též tímto způsobem velmi dobře demonstrovat různé difrakční jevy při výuce fyziky a optiky na středních a vysokých školách.

*Článek byl vypracován v rámci výzkumného projektu CEZ J04/98:210000022 a za podpory Nadace ČVUT Stanislava Hanzla.*

### **Literatura**

- [1] M.Born,E.Wolf, Principles of Optics, Pergamon Press, New York 1964
- [2] A.Mikš , Aplikovaná optika 10, Vydavatelství ČVUT, Praha 2000.
- [3] J.Fuka, B.Havelka, Optika, SPN, Praha 1961.

**Doc.RNDr. Antonín Mikš, CSc.,** ČVUT v Praze, Fakulta stavební, Katedra fyziky, Thákurova 7, 166 36 Praha 6 – Dejvice, tel: +42 02 2435 4948, e-mail: miks@fsv.cvut.cz

**Ing.Jiří Novák,** ČVUT v Praze, Fakulta stavební, Katedra fyziky, Thákurova 7, 166 36 Praha 6 – Dejvice, tel: +42 02 2435 4435, e-mail: novakji@fsv.cvut.cz