

Konference MATLAB 2000 - Praha

SIMULACE STAVOVÝCH DIFERENČNÍCH ROVNIC POMOCÍ PROSTŘEDÍ MATLAB PŘI IMPLEMENTACI ČÍSLICOVÝCH FILTRŮ V SIGNÁLOVÝCH PROCESORECH

Prof. Ing. Zdeněk Smékal, CSc.

Ústav Telekomunikací, Fakulta elektrotechniky a informatiky, Vysoké učení technické v Brně,
Purkyňova 118, 612 00 Brno, tel.: 05 - 411 49 171, fax.: 05 - 411 49 192
e-mail: smekal@utko.fee.vutbr.cz

Souhrn

V příspěvku je popsán jednoduchý zápis stavových diferenčních rovnic číslicového filtru typu IIR v programovém prostředí MATLAB a je naznačen způsob kontroly všech vnitřních stavových proměnných, vstupních a výstupních proměnných a mezivýsledků aritmetických operací, které se vyskytují při realizaci algoritmu. Jako příklad je zvolena trojpásmová zadrž, která má být implementována v signálovém procesoru s pevnou řádovou čárkou s harvardskou architekturou.

1. Úvod

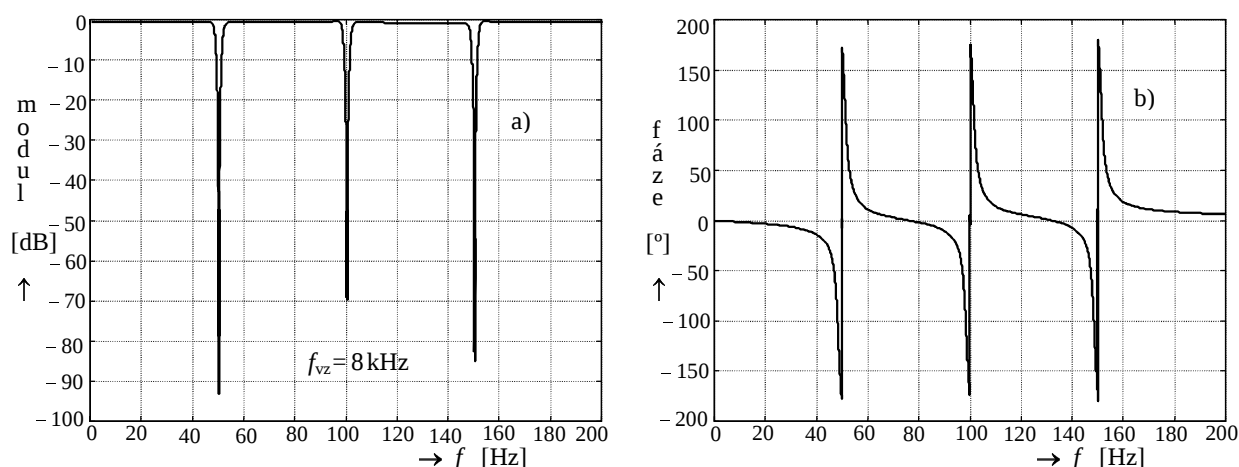
Pro realizaci algoritmů číslicových filtrů existuje celá řada technických prostředků. Jejich výběr je kromě ceny určen mnoha faktory. Jedním z prostředků realizace mohou být signálové procesory s pevnou řádovou čárkou. Signálový procesor je jednočipový mikroprocesor nebo mikroprocesorový systém, který je přizpůsoben k zpracování složitých algoritmů číslicového zpracování signálu. Popis jeho vlastností lze nalézt např. v prameni [1]. Často používanými bloky zpracování signálu jsou číslicové filtry s nekonečnou impulsní charakteristikou (typu IIR) a konečnou impulsní charakteristikou (typu FIR). Z hlediska implementace v signálovém procesoru je složitější realizovat číslicový filtr typu IIR, a proto se budeme věnovat jeho realizaci.

2. Popis číslicového filtru typu IIR diferenčními rovnicemi

Při implementaci daného algoritmu číslicového filtru s nekonečnou impulsní charakteristikou (typu IIR) v signálovém procesoru se zásadně vyhneme diferenčním rovnicím vnějšího popisu diskrétního systému [2]. Použití těchto algoritmů vyžaduje vždy minimálně dvakrát větší prostor datové paměti pro ukládání zpožděných vzorků vstupních a výstupních signálů. Vnitřní (stavový) popis diskrétního systému (tedy i číslicového filtru typu IIR) je znám ve dvou základních kanonických formách. Právě simulace stavových diferenčních rovnic pro obě kanonické formy v programovém prostředí MATLAB pomohla objevit skutečnost, že jedna z těchto forem je méně vhodná pro implementaci v signálových procesorech s harvardskou architekturou s pevnou řádovou čárkou [3].

Jako příklad zvolme realizaci číslicového filtru pro filtraci rušivého signálu o síťovém kmitočtu 50 Hz a jeho dvou harmonických složek 100 Hz a 150 Hz s minimálním útlumem alespoň 50 dB a s co nejužšími potlačenými pásmy. Vzorkovací kmitočet je zvolen 8000 Hz, tj.

hranice použitelného pásma je ohraničena kmitočtem 4000 Hz. Jako výsledek návrhu byl získán číslicový filtr typu IIR 12. řádu, který byl realizován jako kaskáda šesti sekcí 2. řádu. Koeficienty dílčích sekcí byly kvantovány na 16 bitů. Číselné hodnoty koeficientů jsou uvedeny v pramenu [2]. Modulová a fázová kmitočtová charakteristika jsou vidět na obr.1.



Obr.1. Modulová kmitočtová charakteristika (a) a fázová kmitočtová charakteristika (b) pásmové zádrže 12. řádu.

Graf signálových toků celého filtru typu pásmové zádrže je znázorněn na obr.2. Dílčí sekce jsou realizovány v 1. kanonické formě. Další možností je realizovat dílčí sekce v 2. kanonické formě. Tuto formu bychom získali z 1. kanonické formy pomocí transponování grafu signálových toků. *Transponování grafu* znamená operaci, která je provedena tak, že se nejprve odstraní vstupy s počátečními podmínkami a potom se zamění uzly vstupní a výstupní veličiny a otočí se do protisměru šipky přenosu všech větví. Na závěr se opět vloží vstupy s počátečními podmínkami.

Stavové diferenční rovnice pro dílčí sekce 2. řádu mají tento tvar:

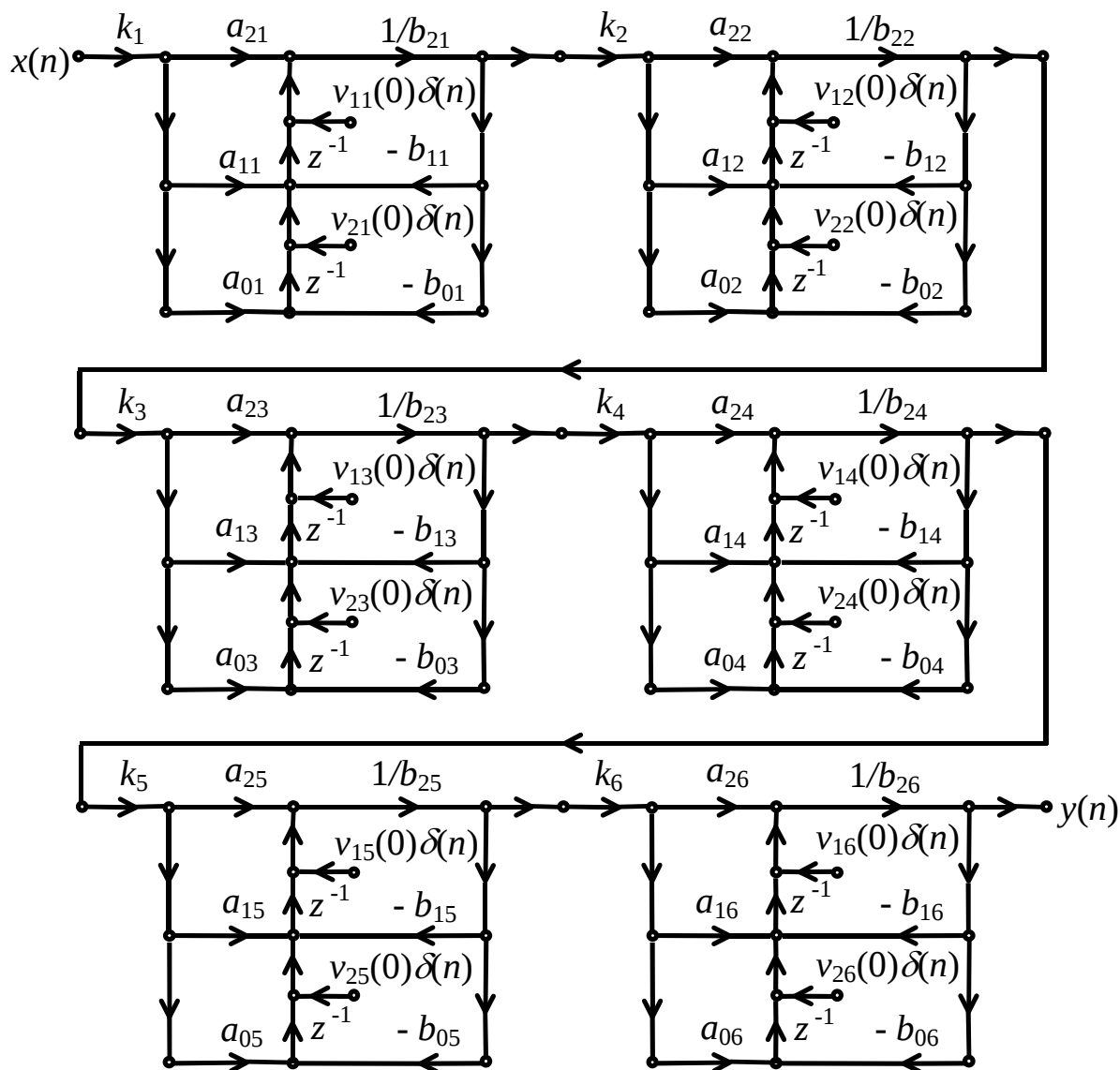
a) pro 1. kanonickou formu

$$\begin{aligned} v_{1i}(n+1) &= a_{1i}x_i(n) - b_{1i}y_i(n) + v_{2i}(n) \quad , \\ v_{2i}(n+1) &= a_{0i}x_i(n) - b_{0i}y_i(n), \\ y_i(n) &= \frac{1}{b_{2i}}(v_{1i}(n) + a_{2i}x_i(n)) \quad ; \end{aligned}$$

b) pro 2. kanonickou formu

$$\begin{aligned} v_{1i}(n+1) &= v_{2i}(n) \quad , \\ v_{2i}(n+1) &= \frac{1}{b_{2i}}(x_i(n) - b_{1i}v_{2i}(n) - b_{0i}v_{1i}(n)) \quad , \\ y_i(n) &= a_{2i}v_{2i}(n+1) + a_{1i}v_{2i}(n) + a_{0i}v_{1i}(n) \quad . \end{aligned}$$

pro $i = 1, 2, 3, 4, 5$ a 6.



Obr.2. Graf signálových toků pásmové zádrže 12. řádu.

3. Simulace stavových diferenčních rovnic pomocí programu MATLAB

Předtím, než budeme implementovat pásmovou zádrž v signálovém procesoru s pevnou čárkovou čárkou je nutné zkontrolovat, zda některá z proměnných nepřesahuje rozsah doplňkového kódu (tj. přibližně ± 1), v němž počítá aritmetická jednotka signálového procesoru. Program pro simulaci pásmové zádrže v MATLABU pro 1. kanonickou formu může vypadat následovně:

```
format long e;
N=6400;
%
% Koeficienty pásmové zádrže 12. řádu
% -----
a1=[1; -2+2^(-9)-2^(-11)+2^(-14)+2^(-16); 1];
b1=[1; -2+2^(-8)-2^(-11)+2^(-14)+2^(-16); 1-2^(-9)+2^(-13)-2^(-15)-2^(-16)];
```

```

a2=[1;-2+2^(-9)-2^(-11)+2^(-14);1];
b2=[1;-2+2^(-8)-2^(-11)-2^(-12)+2^(-13)-2^(-14)-2^(-16);1-2^(-9)
+2^(-12)-2^(-14)];
a3=[1;-2+2^(-7)-2^(-9)+2^(-12)+2^(-14)+2^(-16);1];
b3=[1;-2+2^(-7)+2^(-12)+2^(-13);1-2^(-9)+2^(-13)-2^(-16)];
a4=[1;-2+2^(-7)-2^(-9)+2^(-12)+2^(-15)+2^(-16);1];
b4=[1;-2+2^(-7)-2^(-15);1-2^(-9)+2^(-13)+2^(-15)];
a5=[1;-2+2^(-6)-2^(-9)+2^(-12)-2^(-14)+2^(-16);1];
b5=[1;-2+2^(-6)+2^(-12)+2^(-13)-2^(-14)+2^(-16);1-2^(-9)+2^(-13)];
a6=[1;-2+2^(-6)-2^(-9)+2^(-11)-2^(-12)-2^(-13)+2^(-14)-2^(-16);1];
b6=[1;-2+2^(-6)-2^(-12)+2^(-16);1-2^(-9)+2^(-13)+2^(-15)];
%
% Nastavení váhových koeficientů a nulování stavových proměnných
% -----
k=[1;1;1;1;1;1];
v11(1:N+1)=zeros;
v21(1:N+1)=zeros;
v12(1:N+1)=zeros;
v22(1:N+1)=zeros;
v13(1:N+1)=zeros;
v23(1:N+1)=zeros;
v14(1:N+1)=zeros;
v24(1:N+1)=zeros;
v15(1:N+1)=zeros;
v25(1:N+1)=zeros;
v16(1:N+1)=zeros;
v26(1:N+1)=zeros;
%
% Generace vstupního signálu
% -----
fvz=8000;
t=0:N-1;
x=0.245*cos(2*pi*50/8000*t)+0.245*cos(2*pi*100/8000*t)+0.245*cos(2*pi*
150/8000*t)+0.245*cos(2*pi*200/8000*t);
plot(t(1:640)/fvz,x(1:640));grid
%
% 1.kanonická forma číslicového filtru
% -----
%
for n=1:N;
%
% Sekce č.1
% -----
x1(n)=k(1)*x(n);
y1(n)=1/b1(1)*(v11(n)+a1(1)*x1(n));
v11(n+1)=a1(2)*x1(n)-b1(2)*y1(n)+v21(n);
v21(n+1)=a1(3)*x1(n)-b1(3)*y1(n);
%
% Sekce č.2
% -----
x2(n)=k(2)*y1(n);
y2(n)=1/b2(1)*(v12(n)+a2(1)*x2(n));
v12(n+1)=a2(2)*x2(n)-b2(2)*y2(n)+v22(n);
v22(n+1)=a2(3)*x2(n)-b2(3)*y2(n);
%
% Sekce č.3
% -----
x3(n)=k(3)*y2(n);
y3(n)=1/b3(1)*(v13(n)+a3(1)*x3(n));
v13(n+1)=a3(2)*x3(n)-b3(2)*y3(n)+v23(n);
v23(n+1)=a3(3)*x3(n)-b3(3)*y3(n);
%

```

```

% Sekce č.4
% -----
x4(n)=k(4)*y3(n);
y4(n)=1/b4(1)*(v14(n)+a4(1)*x4(n));
v14(n+1)=a4(2)*x4(n)-b4(2)*y4(n)+v24(n);
v24(n+1)=a4(3)*x4(n)-b4(3)*y4(n);
%
% Sekce č.5
% -----
x5(n)=k(5)*y4(n);
y5(n)=1/b5(1)*(v15(n)+a5(1)*x5(n));
v15(n+1)=a5(2)*x5(n)-b5(2)*y5(n)+v25(n);
v25(n+1)=a5(3)*x5(n)-b5(3)*y5(n);
%
% Sekce č.6
% -----
x6(n)=k(6)*y5(n);
y6(n)=1/b6(1)*(v16(n)+a6(1)*x6(n));
v16(n+1)=a6(2)*x6(n)-b6(2)*y6(n)+v26(n);
v26(n+1)=a6(3)*x6(n)-b6(3)*y6(n);
end;

y(n)=y6(n);

end;

```

Pro testování byl zvolen diskretní vstupní signál vytvořený součtem čtyř kosinusovek s amplitudou 0,245 a s kmitočty 50 Hz, 100 Hz, 150 Hz a 200 Hz. Po filtraci by měla zůstat složka o kmitočtu 200 Hz. Amplitudy o hodnotě 0,245 byly zvoleny z důvodu zamezení saturace vstupního signálu v doplňkovém kódu při implementaci v signálovém procesoru.

$$\begin{aligned}
 x(n) = & 0,245 \cos(2\pi 50 n / f_{vz}) + 0,245 \cos(2\pi 100 n / f_{vz}) \\
 & + 0,245 \cos(2\pi 150 n / f_{vz}) + 0,245 \cos(2\pi 200 n / f_{vz}) \quad .
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Program pro realizaci pásmové zadržky s dílčími sekcemi v druhé kanonické formě má podobný tvar s tím rozdílem, že je nutné nahradit vnitřní cyklus touto částí:

```

% 2. kanonická forma číslicového filtru
% -----
for n=1:N;
%
% Sekce č.1
% -----
x1(n)=k(1)*x(n);
v11(n+1)=v21(n);
v21(n+1)=1/b1(1)*(x1(n)-b1(2)*v21(n)-b1(3)*v11(n));
y1(n)=a1(1)*v21(n+1)+a1(2)*v21(n)+a1(3)*v11(n);
%
% Sekce č.2
% -----
x2(n)=k(2)*y1(n);
v12(n+1)=v22(n);
v22(n+1)=1/b2(1)*(x2(n)-b2(2)*v22(n)-b2(3)*v12(n));
y2(n)=a2(1)*v22(n+1)+a2(2)*v22(n)+a2(3)*v12(n);

```

```

%
% Sekce č. 3
% -----
x3(n)=k(3)*y2(n);
v13(n+1)=v23(n);
v23(n+1)=1/b3(1)*(x3(n)-b3(2)*v23(n)-b3(3)*v13(n));
y3(n)=a3(1)*v23(n+1)+a3(2)*v23(n)+a3(3)*v13(n);
%
% Sekce č. 4
% -----
x4(n)=k(4)*y3(n);
v14(n+1)=v24(n);
v24(n+1)=1/b4(1)*(x4(n)-b4(2)*v24(n)-b4(3)*v14(n));
y4(n)=a4(1)*v24(n+1)+a4(2)*v24(n)+a4(3)*v14(n);
%
% Sekce č. 5
% -----
x5(n)=k(5)*y4(n);
v15(n+1)=v25(n);
v25(n+1)=1/b5(1)*(x5(n)-b5(2)*v25(n)-b5(3)*v15(n));
y5(n)=a5(1)*v25(n+1)+a5(2)*v25(n)+a5(3)*v15(n);
%
% Sekce č. 6
% -----
x6(n)=k(6)*y5(n);
v16(n+1)=v26(n);
v26(n+1)=1/b6(1)*(x6(n)-b6(2)*v26(n)-b6(3)*v16(n));
y6(n)=a6(1)*v26(n+1)+a6(2)*v26(n)+a6(3)*v16(n);

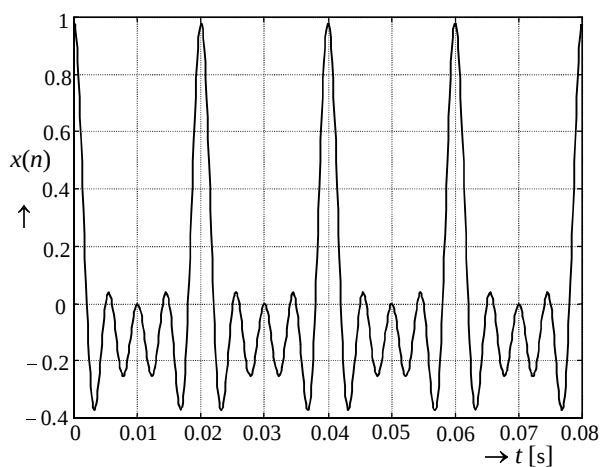
y(n)=y6(n);

end;

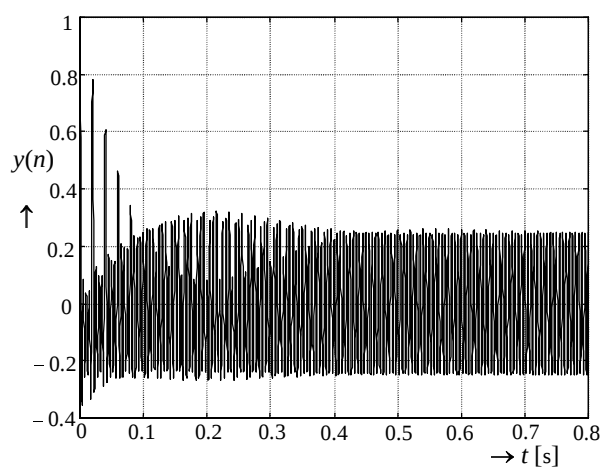
```

4. Výsledky simulace stavových diferenčních rovnic

Po provedení výpočtu programů pro obě kanonické formy jsou výsledky vidět na následujících obrázcích. Na obr.3a vidíme vstupní signál daný vztahem 1. Na obr.3b je vidět výsledek po filtraci pásmovou zádrží. Po odeznění přechodného děje zbude pouze harmonická složka o kmitočtu 200 Hz.

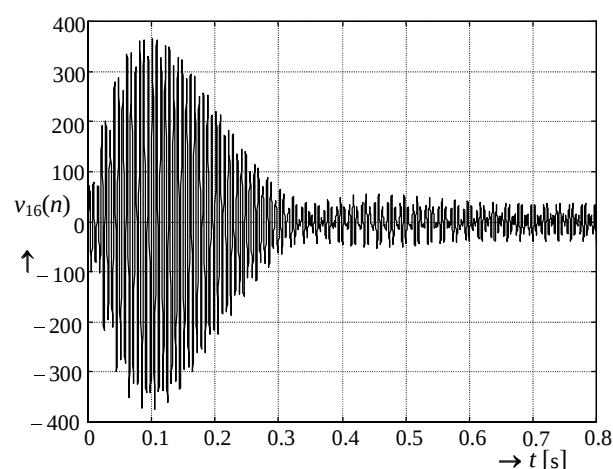
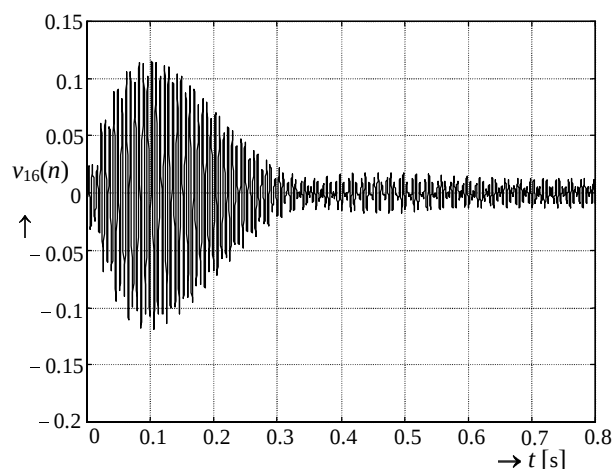
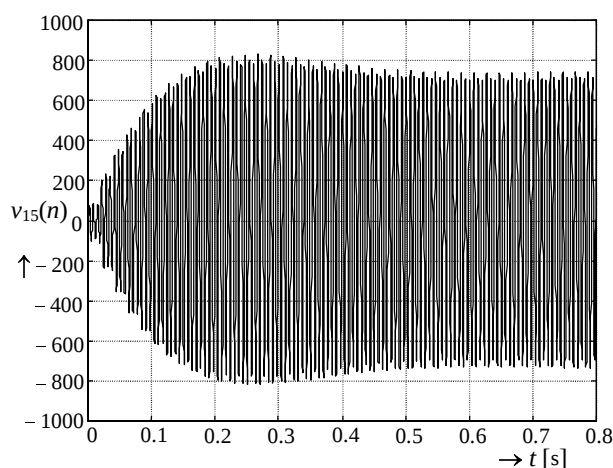
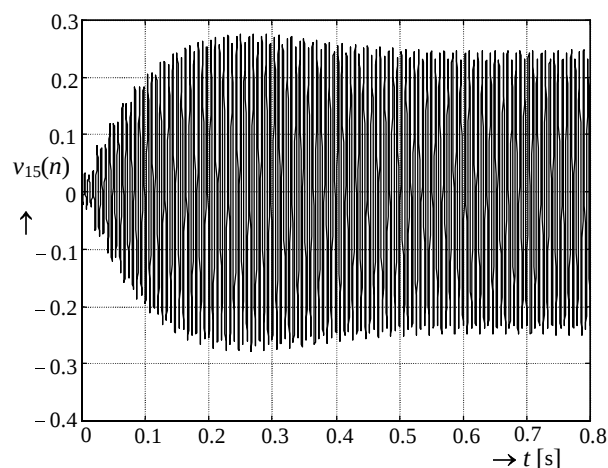
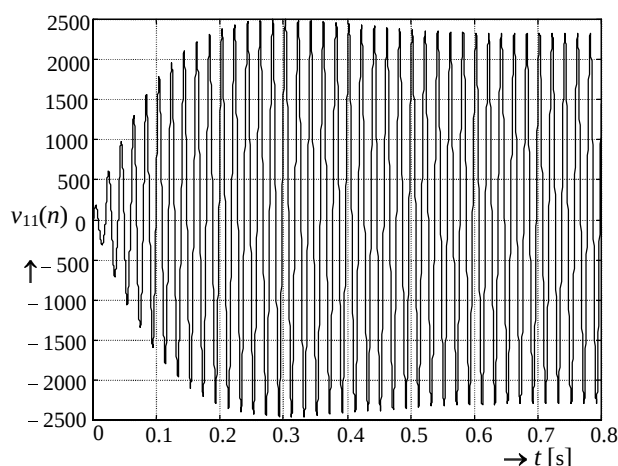
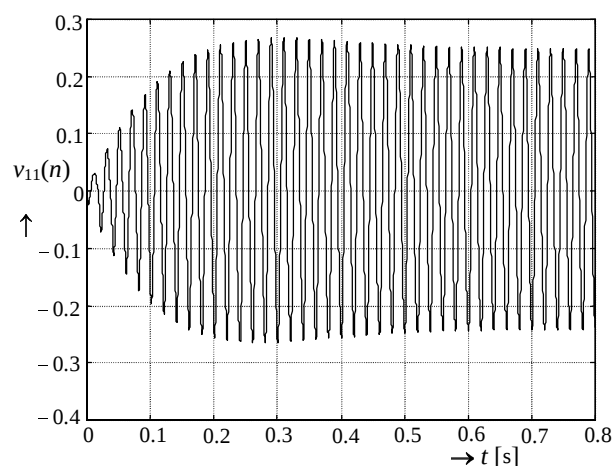


Obr.3. Vstupní signál $x(n)$, složený ze čtyř kosinusovek.



Obr.4. Výstupní signál $y(n)$ po filtraci.

Výstupní signál bude mít stejný tvar pro realizace dílčích sekcí pásmové zadržky jak v 1. kanonické formě, tak i v 2. kanonické formě. Při pohledu na sobě odpovídající vnitřní stavové proměnné obou kanonických forem vidíme, že se tvarově příliš neliší. Pro jednoduchost byly vybrány pouze první stavové proměnné $v_{1i}(n)$ dílčích sekcí $i = 1, 5$ a 6 . Jsou zobrazeny na obrázcích 5. a 6.



Obr.5. První vnitřní stavové proměnné $v_{1i}(n)$ sekcí 1, 5 a 6 pro 1. kanonickou formu.

Obr.6. První vnitřní stavové proměnné $v_{1i}(n)$ sekcí 1, 5 a 6 pro 2. kanonickou formu.

Porovnáme-li ovšem hodnoty měřítek odpovídajících grafů stavových proměnných vidíme podstatné rozdíly. Tyto rozdíly lze nalézt u všech odpovídajících stavových proměnných obou kanonických forem. Pokud daný číslicový filtr realizujeme např. na počítači typu PC v pohyblivé řádové čáře, tak nám nevadí různý dynamický rozsah, protože výsledný průběh výstupního signálu musí být v obou případech totožný. Vážné problémy nastanou při použití aritmetiky s pevnou řádovou čárkou. V tom případě se pro vyjádření čísel většinou používá doplňkový kód, jehož přibližný rozsah je ± 1 . Vidíme, že 2. kanonická forma je z tohoto důvodu naprosto nevhodná, neboť při použití stavových proměnných pro výpočet algoritmu dochází k neodstranitelné saturaci aritmetiky, která znemožní správnou funkci číslicového filtru typu IIR. Proto se nedoporučuje použití 2. kanonické formy pro implementaci náročných zadání číslicových filtrů typu IIR v signálovém procesoru s pevnou řádovou čárkou. Při implementaci číslicových filtrů typu FIR, pokud jsou realizovány nerekurzivně (tj. bez zpětných vazeb), se takové rozdíly mezi hodnotami stavových proměnných neprojevují a je naopak výhodnější použít 2. kanonickou formu pro implementaci v signálovém procesoru s pevnou řádovou čárkou z důvodu efektivnějšího zápisu algoritmu v jazyku procesoru.

5. Závěr

Na základě výsledků simulace v programu MATLAB vidíme, že stavové proměnné dílčích sekcí v 2. kanonické formě číselně mnohonásobně přesahují rozsah doplňkového kódu, a proto je nevhodné použít této struktury pro implementaci číslicových filtrů typu IIR v signálovém procesoru s pevnou řádovou čárkou. Úplné programy pro simulaci zde uvedeného příkladu lze nalézt jako přílohu publikace [2] na internetové adrese <http://www.cas.cz/ACADEMIA/edicni2000.htm#technika>.

Literatura:

- [1] SMÉKAL Z., VÍCH R.: Zpracování signálů pomocí signálových procesorů. Radix, Praha 1998. ISBN 80-86031-18-7
- [2] VÍCH R., SMÉKAL, Z.: Číslicové filtry. Academia, Praha 2000. ISBN 80-200-0761-X
- [3] SMÉKAL Z., VÍCH R.: Optimized Models of IIR Digital Filters for Fixed-Point Digital Signal Processor. In: Proc. of the 6th IEEE International Conference on "Electronics, Circuits and Systems (ICECS'99)", September 5-8, 1999, Cyprus, pp.145-148. ISBN 0-7803-5682-9

Příspěvek byl řešen v rámci projektu GAČR č.102/00/0936 a za podpory řešení výzkumného záměru CEZ: J22/98:262200011.