

FILTRACE SIGNÁLŮ POMOCÍ KOMPLEXNÍ VLNKOVÉ TRANSFORMACE

Radim Kolář

Jiří Kozumplík

Ústav biomedicínského inženýrství,
Fakulta elektrotechniky a informatiky,
Vysoké učení technické v Brně
Purkyňova 118, 612 00 Brno
tel. (+420 5)41149551, fax (+420 5) 41149564,
e-mail: kolarr@dbme.fee.vutbr.cz, kozumpli@dbme.fee.vutbr.cz

Abstrakt

Tento příspěvek seznamuje s využitím filtrace signálů pomocí vlnkové transformace s komplexními vlnkami. Je zaměřen jednak na princip generování ortogonálních komplexních bank filtrů, tak i na problémy a jejich řešení při realizaci v prostředí Matlab.

1 Úvod

Vlnková transformace (WT) našla za posledních 10 let řadu uplatnění v oblasti zpracování a analýzy signálů i obrazů. Z velké části jsou používány reálné vlnky (resp. banky filtrů), což je dáno tím, že zde v případě použití Mallatova algoritmu [6], nedochází k redundanci dat. Jestliže se však použijí komplexní filtry, bude reálný vstupní signál po rozkladu komplexní a vzroste tím množství zpracovávaných dat. Ukazuje se však, že v některých případech je použití komplexní banky filtrů pro filtraci signálů vhodnější.

Při realizaci filtrace s komplexními bankami filtrů v prostředí Matlab 6 nastávají potíže s věrnou rekonstrukcí. Proto je potřeba provést některé změny v *Wavelet toolboxu*.

V následujících kapitolách bude stručně popsán způsob konstrukce ortogonální banky filtrů s komplexními filtry, některé metody prahování a také realizace v prostředí Matlab 6.0 (R12).

2 Ortogonální banky filtrů a vlnkové funkce

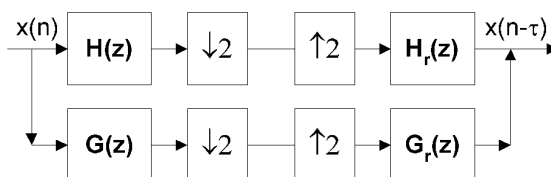
Základní schéma rozkladové a rekonstrukční banky filtrů je na obrázku 1, kde $H(z)$ a (resp. $H_r(z)$) je rozkladová (resp. rekonstrukční) dolní propust a $G(z)$ a (resp. $G_r(z)$) je rozkladová (resp. rekonstrukční) horní propust. Jestliže má být zachována dokonalá rekonstrukce, musí platit následující dvě podmínky:

$$H(z)H_r(z) + G(z)G_r(z) = 2z^{-\tau} \quad (1)$$

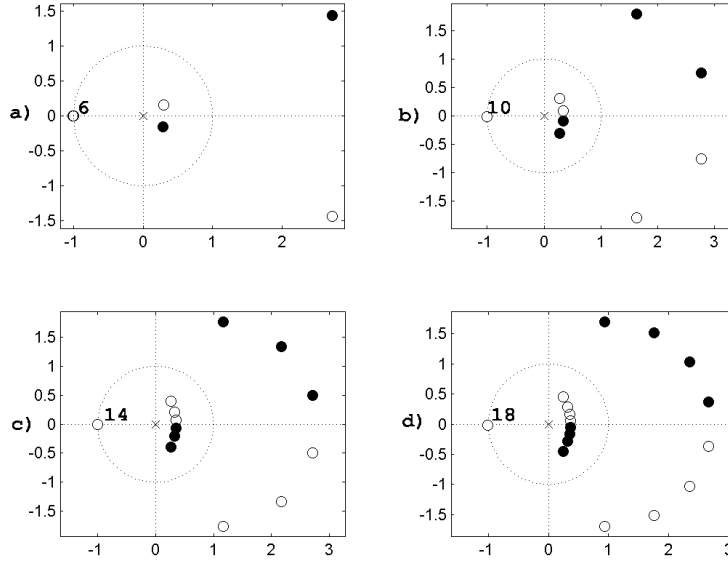
a

$$G(-z)G_r(z) + H(-z)H_r(z) = 0. \quad (2)$$

První podmínka vyjadřuje požadavek na nezkrácení signálu a druhá podmínka zamezuje vzniku aliasingu. Konstanta 2 je zde z důvodu zachování stejné energie signálu při interpolaci. Při podrobnější analýze lze



Obrázek 1: Dvoukanálová rozkladová a rekonstrukční banka filtrů, kde $\downarrow 2$ (resp. $\uparrow 2$) je decimace (resp. expanze) s faktorem 2.



Obrázek 2: Rozložení nul a pólů HB systému pro stupně: a) $p=3$, b) $p=5$, c) $p=7$ a d) $p=9$. Plné a prázdné kroužky vyznačují nekonjugovaný výběr nul, vedoucí na komplexní banku filtrů.

určit vztah mezi jednotlivými filtry, který vede na ortogonální banku filtrů:

$$\begin{aligned} H_r(z) &= z^{-\tau} H(z^{-1}) \\ G_r(z) &= z^{-\tau} G(z^{-1}) \end{aligned} \quad (3)$$

Po dosazení do (1) dostaneme

$$\begin{aligned} H(z)H(z^{-1}) + H(-z^{-1})H(-z) &= 2 \\ P(z) + P(-z) &= 2, \end{aligned} \quad (4)$$

kde $P(z) = H(z)H(z^{-1})z^{-\tau}$ a značí tzv. "halfband" (HB) filtr.

Při návrhu rozkladových a rekonstrukčních filtrů se tedy postupuje následovně:

1. Návrh HB systému $P(z)$, typu dolní propust.
2. Rozložení $P(z)$ na součin $H(z)H_r(z) = H(z)H(z^{-1})z^{-\tau}$.
3. Výpočet $G(z)$ a $G_r(z)$.

Otázkou zůstává, jak určit přenosovou funkci $P(z)$. Pro maximálně ploché frekvenční charakteristiky $P(\omega)$ při daném stupni $N = 4p - 2$, lze koeficienty polynomu $P(z)$ určit např. z Lagrangeova interpolačního polynomu [7, 1]:

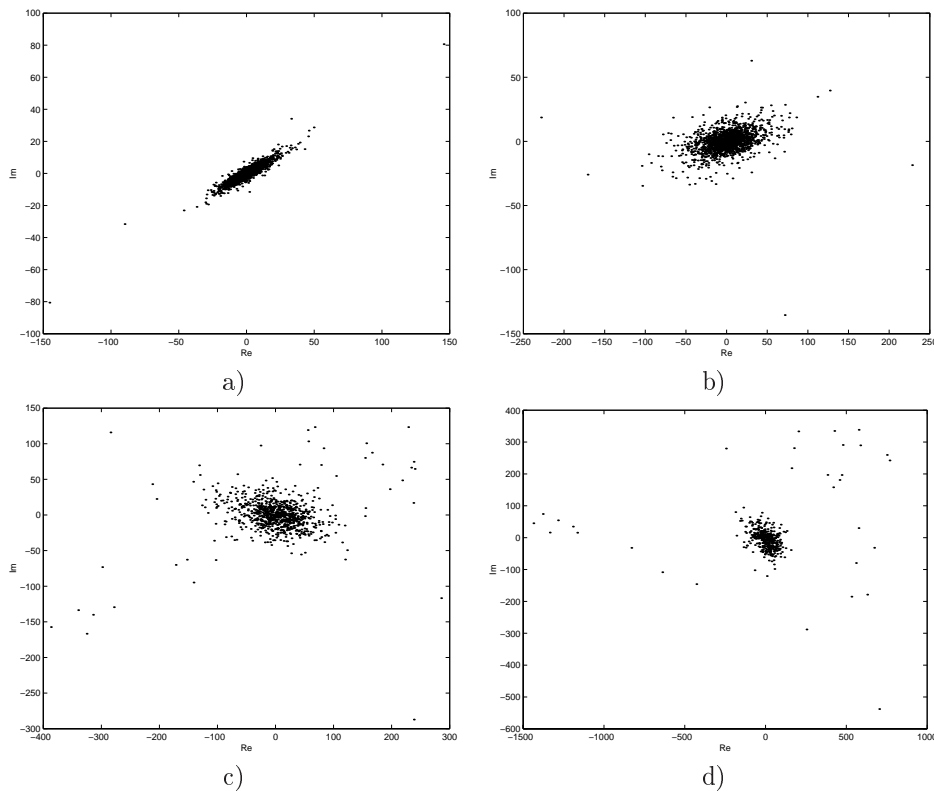
$$P(z) = 2 \left(\frac{1+z}{2} \right)^p \left(\frac{1+z^{-1}}{2} \right)^p \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p+k-1}{k} \left(\frac{1-z}{2} \right)^k \left(\frac{1-z^{-1}}{2} \right)^k \quad (5)$$

Rozložení nul a pólů tohoto systému je ukázáno pro různé stupně na obrázku 2. Je zřejmé, že rozklad $P(z)$ na součin dvou funkcí není jednoznačný. Můžeme tedy dostat různé filtry pro stejný stupeň. Na obrázku 2 je vidět, že komplexní nuly se vyskytují vždy ve čtveřicích na místech z_i a \bar{z}_i uvnitř jednotkové kružnice a $1/z_i$ a $1/\bar{z}_i$ vně jednotkové kružnice. Reálná banka filtrů je navržena tak, aby do rozkladových (rekonstrukčních) filtrů přispívaly vždy komplexně sdružené nuly uvnitř (vně) jednotkové kružnice. Pro komplexní filtry však už toto omezení neplatí a možný (nekonjugovaný) výběr ilustruje právě obrázek 2.

3 Prahování komplexních vlnkových koeficientů

Filtrace prostřednictvím WT se skládá ze tří základních kroků:

1. Rozklad signálu do $M + 1$ pásem, kde M je stupeň rozkladu s předem zvoleným typem filtrů.
2. Modifikace vlnkových koeficientů pomocí zvolené prahovací strategie.



Obrázek 3: Ukázky rozložení komplexních vlnkových koeficientů pro a) 1, b) 2, c) 3 a d) 4 pásmo. Pro rozklad byl použitý komplexní vlnky typu Daubechies řádu 3.

3. Inverzní WT.

Druhý krok má podstatný vliv na výsledek filtrace. Existují různé metody pro stanovení prahu, ať již globálního, různého pro různá pásma či adaptivního uvnitř pásma. Zaměříme se na druhou možnost - tedy práh, který se mění s hloubkou rozkladu, ale uvnitř pásma je neměnný a pásmo aproximačních koeficientů ($M + 1$) zůstává zachováno beze změny. Pro prahování reálných koeficientů bylo potřeba stanovit jednu hodnotu. Nyní však jsou hodnoty vlnkových koeficientů komplexní a je zde proto více možností jak stanovit práh. Určitým vodítkem může být tvar rozložení vlnkových koeficientů na jednotlivých úrovních (obrázek 3). Bylo pozorováno [4, 5], že tvar rozložení koeficientů je přibližně eliptický. To odpovídá normálnímu rozložení dvou korelovaných náhodných veličin - tzv. bi-normální rozložení. Proto by prahování mělo respektovat tento tvar a mít tedy tvar elipsy (obrázek 4). Při určování parametrů elipsy půjde jednak o výpočet natočení hlavní poloosy (proložením přímkou metodou nejmenších čtverců) a pak o stanovení velikostí jednotlivých poloos (tedy příslušných prahů). Ty by zřejmě měly být závislé na rozptylu šumu:

$$\begin{aligned}\tau_{re}^j &= \lambda_{re}^j \sigma_{re} \\ \tau_{im}^j &= \lambda_{im}^j \sigma_{im},\end{aligned}\tag{6}$$

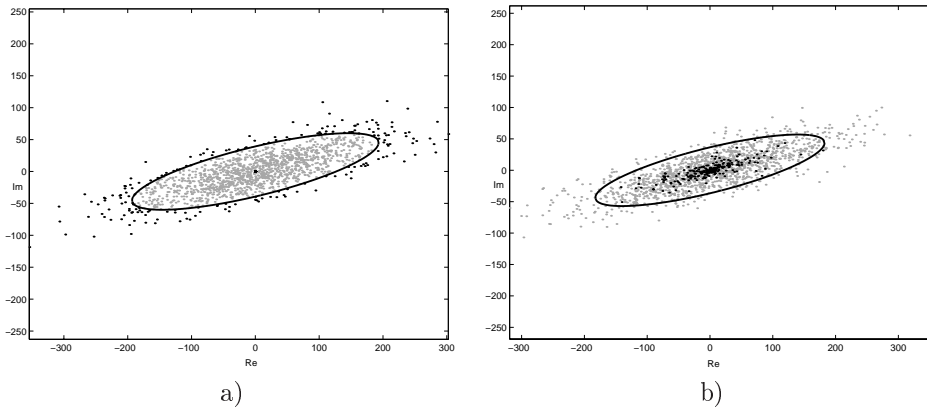
kde parametry λ_{re}^j a λ_{im}^j jsou nastavitelné podle konkrétní aplikace, nebo mohou vycházet například z "univerzálního" prahu [2] a jsou závislé na hloubce rozkladu j .

4 Úprava standardních matlabovských funkcí

Abychom mohli v Matlabu využívat komplexní banky filtrů typu Daubechies (které nejsou standardně zavedeny), je potřeba je pomocí "vlnkového manažera" zavést. K tomu slouží funkce `wavemngr.m`, kterou zde nebudeme blíže popisovat. Uvedeme pouze zápis v Matlabu, který má následující tvar:

```
wavemngr('add','C_Daubechies','cdb',1,'2 6 10 14 18 **','cdaubwavf.m');
```

Funkce `cdaubwavf.m` generuje koeficienty komplexní rekonstrukční dolní propusti [8]. Po tomto zavedení je dále potřeba provést úpravu standardní funkce obsažené ve *Wavelet toolboxu* s názvem `orthfilt.m`. Ta slouží k výpočtu jednotlivých rozkladových a rekonstrukčních filtrů. Funguje ovšem správně pouze pro



Obrázek 4: Eliptické prahování: a) tvrdé b) měkké. Černě jsou vyznačeny koeficienty, které zůstanou zachovány.

reálné filtry. Pro komplexní je potřeba ji na konci doplnit o konjugaci tímto způsobem:

```
Lo_R = conj(Lo_R);
Hi_D = conj(Hi_D);
```

Dále je potřeba upravit příslušné funkce sloužící k rozkladu a rekonstrukci (`wavedec.m` a `waverec.m`) tak, aby dokázaly počítat s komplexními filtry. To lze provést snadno podle elementárních matematických pouček.

5 Aplikace

WT s komplexními filtry byla použita pro filtraci reálného zátěžového (tedy silně zarušeného) signálu EKG a výsledky byly porovnány s výsledky získanými filtrací Butterworthovou dolní propustí 6.řádu s mezní frekvencí 40 Hz. Pro stanovení prahu byl použit odhad šumu, získaný z nejvyššího pásma [3]:

$$\begin{aligned}\sigma_{re} &= \text{Median}(|d_{re}^1(k)|)/0.6745 \\ \sigma_{im} &= \text{Median}(|d_{im}^1(k)|)/0.6745,\end{aligned}\quad (7)$$

kde $d_{re}^1(k)$, resp. $d_{im}^1(k)$ jsou reálné, resp. komplexní vlnkové koeficienty v nejvyšším pásmu. Parametry λ_{re}^j a λ_{im}^j ve vztahu (6) určíme podle požadavků na výsledek filtrace. V našem případě, kdy nám jde o zachování strmosti i velikosti QRS komplexů a potlačení šumu mimo QRS, byly koeficienty nastaveny stejně pro reálnou i imaginární složku: [8, 7, 8, 10, 8] (od nejvyššího k nejnižšímu pásmu). Byl tedy použit rozklad do 5 úrovní a ortogonální vlnky řádu $p = 3$. Výsledek filtrace je zobrazen na obrázku 5.

6 Závěr

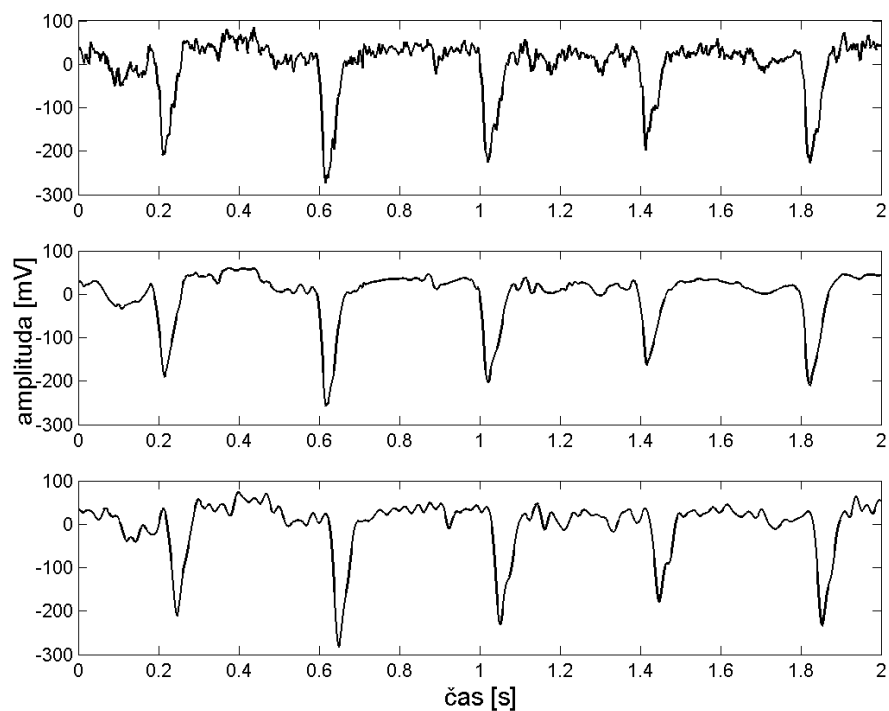
V prostředí Matlab byla implementována vlnková transformace s komplexními vlnkami pro reálný vstupní signál. Bylo třeba provést některé úpravy standardních funkcí obsažených ve *Wavelet toolboxu* pro zajištění dokonalé rekonstrukce. Ukazuje se, že použití komplexních filtrů je pro filtraci výhodné především pro příznivý tvar impulsních charakteristik (symetrie, resp.antisymetrie), zatímco reálné impulsní charakteristiky ortogonálních filtrů typu Daubechies jsou nesymetrické.

Poděkování

Tato práce byla vypracována za podpory Grantové agentury České republiky, reg. číslo grantu 102/99/1228 a výzkumného záměru číslo CEZ J22/98:262200011.

Reference

- [1] Daubechies, I.: Ten Lectures on Wavelets, Society for Industrial and Applied Mathematics, Pennsylvania, 1992
- [2] Donoho, D.L.: De-Noising by Soft-Thresholding, IEEE Trans. Inform. Theory 41, pp.613-627, 1995



Obrázek 5: Ukázka výsledků filtrace: a) měřený signál, b) výsledek po filtraci s komplexními bankami filtrů, c) signál po filtraci Butterworthovou dolní propustí

- [3] Donoho, D.L.: Nonlinear wavelet methods for recovery of signal, densities, and spectra from indirect and noisy data, Stanford University, 1993
- [4] Gagnon, L., Smaili, F.D.: Speckle noise reduction of airborne SAR images with symmetric Daubechies wavelets. SPIE Proc.#2759, 1993
- [5] Gagnon, L., Jouan, A. Speckle Filtering of SAR Images - A Comparative Study Between Complex-Wavelet-Based and Standard Filters. Wavelet Applications in Signal and Image Processing, San Diego, 1997
- [6] Mallat, S.G.: A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation. IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence vol.11, No.7, pp.974:693, 1989
- [7] Strang, G., Nguyen, T.: Wavelets and Filter Banks. Wellesley, Wellesley - Cambridge Press, 1996
- [8] <http://dmsun4.bath.ac.uk/resource/waveletsrc.htm>