Rozptylová funkce optické soustavy s velkou numerickou aperturou

Antonín Mikš
Katedra fyziky, FSv ČVUT, Praha

Je uvedena skalární teorie určení rozptylové funkce bodu pro optické soustavy mající velkou numerickou aperturu. V optické literatuře se k tomuto jevu nepřihlíží a běžně uváděné vztahy platí jen pro optické soustavy s velmi malou numerickou aperturou. V článku jsou odvozeny analytické vztahy umožňující provést výpočet rozptylové funkce bodu pro fyzikálně dokonalou optickou soustavu s numerickou aperturou konečné hodnoty. Tyto vztahy přecházejí v limitním případě nekonečně malé numerické apertury v klasický vztah uváděný v optické literatuře a jsou tedy jeho zobecněním.

1. Úvod

Rozptylová funkce bodu je základní charakteristikou zobrazovacích vlastností optické soustavy. S ní přímo souvisí problematika rozlišovací schopnosti optické soustavy a problematika optické funkce přenosu. V optické literatuře [1,2,3,4] je problematika rozptylové funkce bodu uváděna jen pro případy optických soustav s velmi malou numerickou aperturou. Tyto vztahy velmi dobře vyhovují pro velkou řadu optických soustav s kterými se v praxi setkáváme, neboť se právě jedná o optické soustavy (dalekohledy, fotografické objektivy apod.), jejichž numerická apertura bývá malá. Např. fotografický objektiv o clonovém čísle c=1,4 má numerickou aperturu A=1/2c=0,36. Typickým reprezentantem optických soustav s velkou numerickou aperturou jsou mikroskopové objektivy.

Úkolem této práce je ukázat vliv numerické apertury optické soustavy na její rozptylovou funkci bodu a to z hlediska skalární teorie vlnění. Dále pak odvodit vztah pro analytický výpočet rozptylové funkce pro případ fyzikálně dokonalé optické soustavy s kruhovou vstupní pupilou a numerickou aperturou konečné hodnoty.

2. Difrakční integrál

Předpokládejme, že známe stav pole U(M) na ploše S, pro stav pole U(P) v libovolném bodě P oblasti omezené plochou S pak platí [1,3,4,5]

$$U(P) = -\frac{i}{\lambda}\iint_S U(M)\frac{e^{ikr}}{r}\cos(n,r)\,dS \ . \qquad (1)$$

kde r je vzdálenost bodu $P(x_P, y_P, z_P)$ od bodu M(x,y,z), $k = 2\pi/\lambda$ je vlnové číslo, λ je vlnová délka záření v daném prostředí, cos(n,r) je kosinus úhlu, který svírá normála n k ploše S se směrem r a $i = \sqrt{-1}$.

Je-li plocha S dána rovnicí z = z(x,y), potom pro element dS této plochy platí [6]

$$dS = \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy = \sqrt{D}\,dxdy \ .$$

V případě kulové plochy o poloměru R a středu v bodě (x_o, y_o, z_o) dostáváme

$$\sqrt{D} = \frac{1}{\sqrt{1 - p^2 - q^2}} \ ,$$

kde jsme označili

$$p = (x - x_o)/R \ , \qquad q = (y - y_o)/R \ ,$$

Označíme-li dále

$$F(p,q) = U(p,q)\sqrt{D} \ , \qquad (2)$$

$$s = n\frac{x_P - x_o}{\lambda_o} \ , \quad t = n\frac{y_P - y_o}{\lambda_o} \ ,$$

kde $k_o = 2\pi/\lambda_o$, přičemž λ_o je vlnová délka světla ve vakuu, potom vztah (1) můžeme psát ve tvaru ($\cos(n,r) \approx 1$)

$$U(s,t) = C \iint_S F(p,q)\, e^{-2\pi i(ps+qt)}\, dp\, dq \ , \qquad (3)$$

kde C je konstanta. Vztah (3) nám tedy umožňuje určit stav pole (amplitudu pole) v obrazové rovině optické soustavy s konečnou numerickou aperturou. Z tohoto vztahu je patrno, že pole U(s,t) je úměrné Fourierově transformaci funkce F(p,q).

3. Rozptylová funkce bodu fyzikálně dokonalé optické soustavy

Fyzikálně dokonalou optickou soustavou nazýváme optickou soustavu, jejíž vlastnosti jsou omezeny pouze difrakcí světla. Takováto soustava je prosta aberací a vlnoplocha z ní vystupující je tedy plocha kulová. Zkoumejme nyní zobrazení osového bodu ($x_o = 0$, $y_o = 0$). Abychom určili amplitudu v obrazové rovině optické soustavy, musíme znát funkci F(p,q) nutnou pro výpočet integrálu (3). Tvar funkce F(p,q) je dán vztahem (2). Dále musíme určit funkci U(p,q) = U(x,y), což je amplituda na vlnoploše vystupující z optické soustavy. Ze zákona zachování energie [3, 4] plyne

$$n_1 |U_1|^2 dS_1 = n_2 |U_2|^2 dS_2 \ ,$$

kde U_1 je amplituda na vlnoploše do optické soustavy vstupující a U_2 = U(x,y) je námi hledaná amplituda na vlnoploše vystupující z optické soustavy, dS_1 je element plochy na vlnoploše vstupující do optické soustavy a dS_2 element plochy na vlnoploše vystupující z optické soustavy, n_1 a n_2 jsou indexy lomu předmětového a obrazového prostředí. Z předcházejícího vztahu dostáváme

$$U_2 = U_1 \sqrt{\frac{n_1}{n_2}\frac{dS_1}{dS_2}} \, .$$

Je-li dále p_1 vzdálenost předmětové roviny od vstupní pupily optické soustavy a p_2 vzdálenost obrazové roviny od výstupní pupily optické soustavy, u_1 aperturní úhel v předmětovém prostoru a u_2 aperturní úhel v obrazovém prostoru, φ_1 polární úhel v rovině vstupní pupily a φ_2 polární úhel v rovině výstupní pupily, potom pro poměr plošných elementů platí

$$\frac{dS_1}{dS_2} = \frac{p_1^2 \sin u_1 du_1 d\varphi_1}{p_2^2 \sin u_2 du_2 d\varphi_2} \, .$$

Předpokládejme dále, že optická soustava splňuje sinovou podmínku

$$\frac{n_1 \sin u_1}{n_2 \sin u_2} = m \, ,$$

kde m je příčné zvětšení optické soustavy. Diferenciací sinové podmínky dostáváme

$$n_1 \cos u_1 du_1 = m \, n_2 \cos u_2 du_2$$

a tedy

$$\frac{du_1}{du_2} = m \frac{n_2}{n_1} \frac{\cos u_2}{\cos u_1} \, .$$

Dosazením tohoto vztahu a sinové podmínky do výrazu pro poměr dS_1/dS_2 dostáváme

$$\frac{dS_1}{dS_2} = \frac{p_1^2}{p_2^2} \left(\frac{n_2}{n_1} m \right)^2 \frac{\cos u_2}{\cos u_1} \, ,$$

kde jsme užili vztahu $d\varphi_1 = d\varphi_2$. Pro amplitudu U_2 potom platí

$$U_2 = U_1 \sqrt{\frac{n_1}{n_2}} \frac{1}{m_P} \sqrt{\frac{\cos u_2}{\cos u_1}} \, ,$$

kde jsme užili vztahu

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{n_2}{n_1} m \, m_P \, ,$$

kde m_P je příčné zvětšení optické soustavy v pupilách. Užitím sinové podmínky pak dostáváme

$$U_2 = U_1 \sqrt{\frac{n_1}{n_2}} \frac{1}{m_P} \frac{\left(1 - \sin^2 u_2\right)^{1/4}}{\left[1 - \left(\frac{n_2}{n_1} m \sin u_2\right)^2\right]^{1/4}} \, .$$

Pro výraz $U\sqrt{D}$, který potřebujeme pro výpočet vztahu (2) pak dostáváme

$$U\sqrt{D} = U_1\sqrt{\frac{n_1}{n_2}}\frac{1}{m_P}\frac{1}{\left(1-\sin^2 u_2\right)^{1/4}\left(1-M\sin^2 u_2\right)^{1/4}} ,$$

kde jsme označili

$$M = \left(\frac{n_2}{n_1}m\right)^2 .$$

Označíme-li T amplitudovou propustnost optické soustavy, potom platí

$$F = T\,U\sqrt{D} = \left(U_1\sqrt{\frac{n_1}{n_2}}\frac{T}{m_P}\right)\frac{1}{\left(1-\sin^2 u_2\right)^{1/4}\left(1-M\sin^2 u_2\right)^{1/4}} .$$

Pomocí tohoto vztahu můžeme určit funkci F, potřebnou pro výpočet amplitudy pole podle vztahu (3) a to pro případ zobrazení osového bodu předmětu. Proveďme si nyní zjednodušení odvozených vztahů. Pro $\sqrt{D}$ platí

$$\sqrt{D} = 1 + \frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{R^2} + \frac{3}{8}\left(\frac{x^2+y^2}{R^2}\right)^2 , \qquad (4)$$

kde jsme se omezili jen na první tři členy rozvoje. Předpokládejme, že výstupní pupila optické soustavy je kruhová s poloměrem křivosti r_K. Platí tedy pro kraj pupily

$$x_K^2 + y_K^2 = r_K^2 .$$

Označíme-li u_K aperturní úhel obecného paprsku v obrazovém prostoru optické soustavy, potom platí

$$\sin u_K = \frac{r_K}{R} .$$

Dosazením do (4) dostáváme

$$\sqrt{D} = 1 + \tfrac{1}{2} r^2 \sin^2 u_K + \tfrac{3}{8} r^4 \sin^4 u_K , \qquad (5)$$

kde

$$r^2 = \left(\frac{x}{r_K}\right)^2 + \left(\frac{y}{r_K}\right)^2 \le 1$$

je normovaný poloměr pupily. Zavedeme-li ve výstupní pupile polární souřadnice r a φ a v obrazové rovině polární souřadnice t a ψ, potom můžeme vztah (3) psát ve tvaru

$$U(t,\psi) = K\int_0^1\int_0^{2\pi} U(r,\varphi)e^{i\tau r\cos(\varphi-\psi)}\left(1+\tfrac{1}{2}r^2\sin^2 u_K + \tfrac{3}{8}r^4\sin^4 u_K\right)r\,dr\,d\varphi \ , \qquad (6)$$

kde K je konstanta a τ je dáno vztahem

$$\tau = k_o\, t\, n \sin u_K$$

Předpokládejme nyní, že příčné zvětšení m optické soustavy je m = -1, příčné zvětšení v pupilách m_P = 1 a předmětové a obrazové prostředí je vzduch. Dále předpokládejme, že amplitudová propustnost optické soustavy je rovna jedné (nebo je konstantní). Za těchto předpokladů můžeme ve vztahu (6) položit U(r, φ) = 1. Jak je známo z teorie Besselových funkcí [6], platí pro Besselovu funkci prvního druhu a řádu nula vztah

$$J_o(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ix\cos(\vartheta-\gamma)}\,d\vartheta \ , \qquad (7)$$

kde γ je libovolné reálné číslo. Užitím (7) v (6) dostáváme

$$U(\tau) = C\int_0^1 J_o(\tau r)\left(1+\tfrac{1}{2}r^2\sin^2 u_K + \tfrac{3}{8}r^4\sin^4 u_K\right)r\,dr \ , \qquad (8)$$

kde C je konstanta. Substitucí $z = \tau\, r$ dostáváme

$$U(\tau) = \frac{C}{\tau^2}\int_0^{\tau} J_o(z)\left(1+\frac{1}{2}\frac{z^2}{\tau^2}\sin^2 u_K + \frac{3}{8}\frac{z^4}{\tau^4}\sin^4 u_K\right)z\,dz \ . \qquad (9)$$

Abychom tento vztah mohli vypočítat, musíme umět vypočítat integrál typu

$$I = \int x^m J_n(x)\,dx \ .$$

Protože platí [6]

$$\int x^n J_{n-1}(x)\,dx = x^n J_n(x) \ ,$$

dostáváme integrací per partes

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \ ,$$

při označení

$$u = x^{m-n-1} \ , \quad dv = x^{n+1} J_n(x)\,dx \ ,$$

následující rekurentní vztah, platí

$$\int x^m J_n(x)\,dx = x^m J_{n+1}(x) - (m-n-1)\int x^{m-1} J_{n+1}(x)\,dx \ .$$

Tohoto rekurentního vztahu nyní použijeme pro výpočet integrálu (9). Označíme-li

$$I_1 = \frac{1}{\tau^2}\int_0^{\tau} J_o(z) z\,dz = \frac{J_1(\tau)}{\tau} \quad ,$$

$$I_2 = \frac{1}{\tau^4}\int_0^{\tau} J_o(z) z^3 dz = \frac{J_1(\tau)}{\tau} - 2\frac{J_2(\tau)}{\tau^2} \quad ,$$

$$I_3 = \frac{1}{\tau^6}\int_0^{\tau} J_o(z) z^5 dz = \frac{J_1(\tau)}{\tau} - 4\frac{J_2(\tau)}{\tau^2} - 8\frac{J_3(\tau)}{\tau^3} \quad ,$$

potom dostáváme

$$U(\tau) = C\left(I_1 + \tfrac{1}{2} I_2 \sin^2 u_K + \tfrac{3}{8} I_3 \sin^4 u_K\right) \ . \qquad (10)$$

Označíme-li dále

$$\alpha = 1 + \tfrac{1}{2}\sin^2 u_K + \tfrac{3}{8}\sin^4 u_K \quad ,$$

$$\beta = \sin^2 u_K + \tfrac{3}{2}\sin^4 u_K \quad ,$$

$$\gamma = 3\sin^4 u_K \quad ,$$

dostáváme výsledný vztah pro amplitudu $U(\tau)$ ve tvaru

$$U(\tau) = C\left[\alpha\frac{J_1(\tau)}{\tau} - \beta\frac{J_2(\tau)}{\tau^2} - \gamma\frac{J_3(\tau)}{\tau^3}\right] . \qquad (11)$$

Abychom určili konstantu C, požadujme, aby pro $\tau = 0$ bylo $U(\tau) = 1$. Ze vztahu (11) dostáváme

$$C = \frac{48}{24\alpha - 6\beta - \gamma}$$

Pro malé aperturní úhly tj. pro $u_K \to 0$ přechází vztah (11) v klasický vztah [1,2,3] a sice

$$U(\tau) = \frac{2J_1(\tau)}{\tau} \ . \qquad (12)$$

Vidíme tedy, že pro optické soustavy s numerickou aperturou konečné hodnoty je nutno pro výpočet rozptylové funkce bodu použít vztah (11), který je dostatečně přesný pro většinu v praxi se vyskytujících případů a ne klasický vztah (12) uváděný v literatuře. Podle klasického vztahu (12) nabude amplituda pole prvně nulové hodnoty pro $\tau = \tau_0 = 3{,}83171$, ze vztahu (11) však plyne, že tam ve skutečnosti bude mít amplituda pole hodnotu

$$U(\tau_0) = -C\left[\beta \frac{J_2(\tau_0)}{\tau_0^{\;2}} + \gamma \frac{J_3(\tau_0)}{\tau_0^{\;3}}\right] .$$

Vztah (11) nám tedy umožňuje provést výpočet amplitudy pole pro případ optických soustav majících numerickou aperturu konečné hodnoty a představuje tedy zobecnění klasického vztahu (12) v který přechází pro nekonečně malou numerickou aperturu.

Uvažujme nyní **obecný případ optické soustavy** s libovolnou hodnotou příčného zvětšení *m*. Je-li příčné zvětšení v pupilách soustavy rovno jedné a amplitudová propustnost optické soustavy je také rovna jedné (nebo je konstantní), potom pro amplitudu pole platí

$$U(\tau) = C_M\left(I_1 + \alpha_M I_2 \sin^2 u_K + \beta_M I_3 \sin^4 u_K\right), \qquad (13)$$

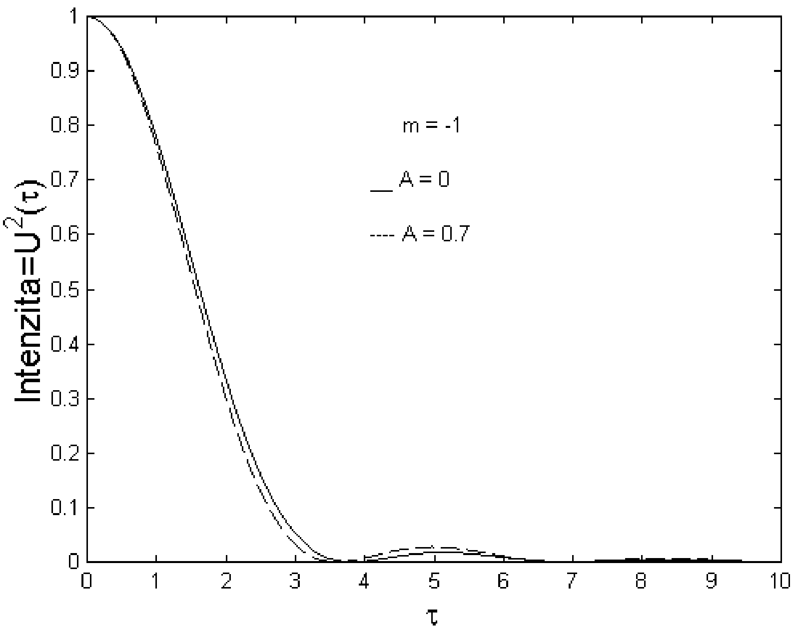
kde

$$\alpha_M = \tfrac{1}{4}(1+M), \quad \beta_M = \tfrac{5}{32}(1+\tfrac{2}{5}M + M^2), \quad M = \left(\frac{n_2}{n_1}m\right)^2,$$

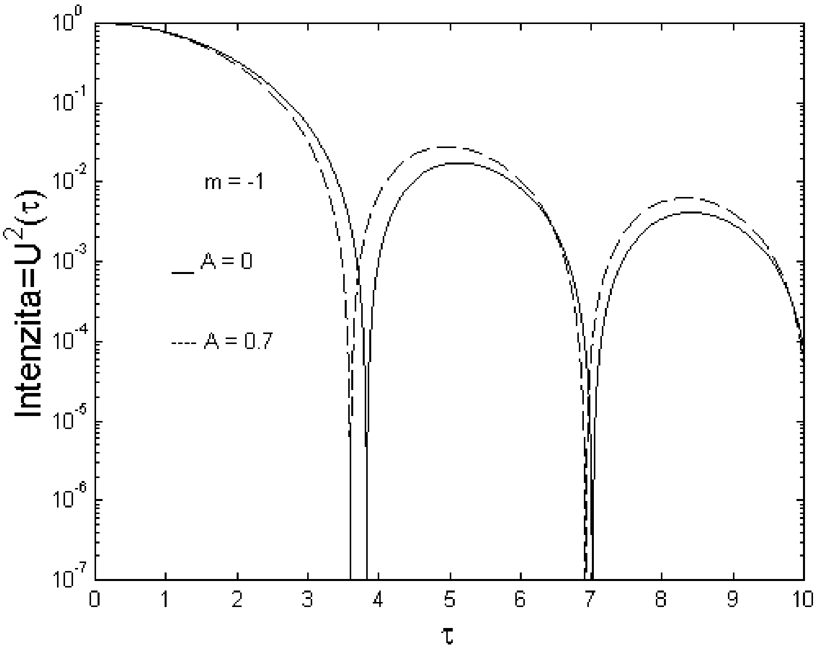
přičemž n_1 a n_2 jsou indexy lomu předmětového a obrazového prostředí. Konstantu C_M určíme obdobným způsobem jako v předcházejícím případě. Vztah (13) je tedy zobecněním vztahu (10) v který, pro m = -1 a $n_1 = n_2$, přechází a je dostatečně přesný pro většinu v praxi se vyskytujících případů.

6. Příklady

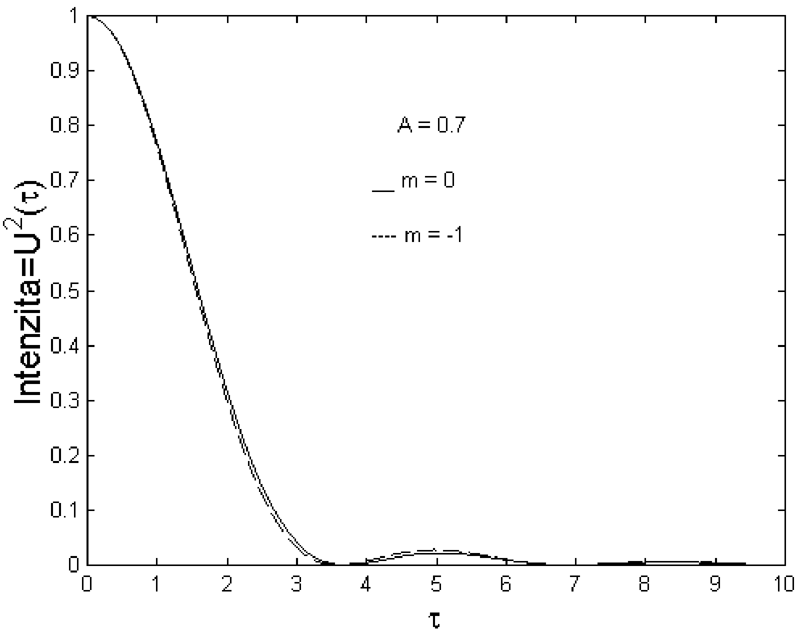
Ukažme si nyní na několika příkladech vliv numerické apertury a příčného zvětšení optické soustavy na rozptylovou funkci optické soustavy. Pro numerické výpočty a grafické znázornění výsledků užijeme systém MATLAB. Na **obr.1** a **obr.2** je ukázána závislost rozptylové funkce optické soustavy na její numerické apertuře a pro příčné zvětšení m = - 1. Na **obr.3** a **obr.**4 je ukázána závislost rozptylové funkce optické soustavy, mající numerickou aperturu A = 0,7 , na příčném zvětšení m.



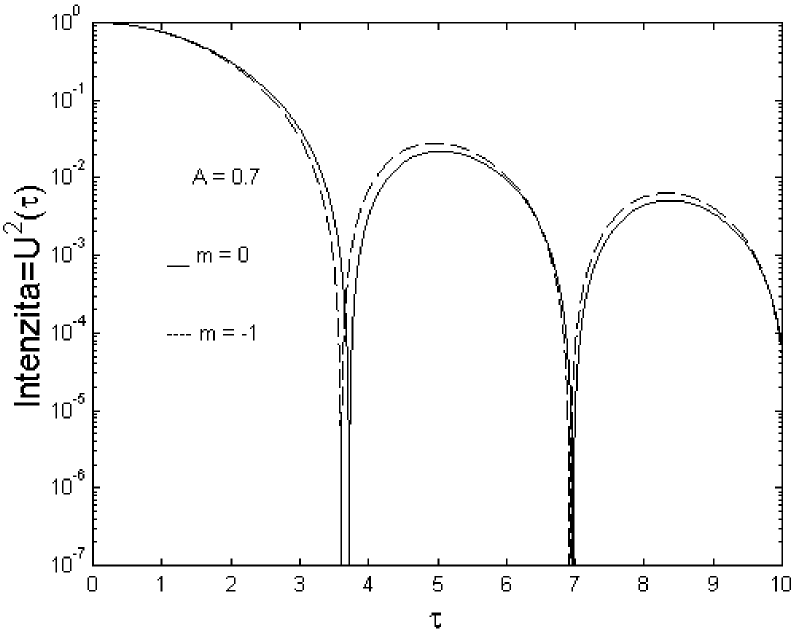
Obr 1.



Obr 2.



Obr 3.



Obr 4.

Jak je z uvedených příkladů patrno, dochází při zvyšování numerické apertury optické soustavy k zužování centrálního maxima rozptylové funkce.

5. Závěr

V článku bylo pojednáno o výpočtu rozptylové funkce bodu na základě skalární teorie vlnového pole. Byl odvozen vztah (3) pro výpočet amplitudy pole v obrazové rovině obecné optické soustavy s velkou numerickou aperturu. Dále byl odvozen analytický vztah (10) pro výpočet amplitudy pole fyzikálně dokonalé optické soustavy mající numerickou aperturu konečné hodnoty, konstantní amplitudovou propustnost a zobrazující při zvětšení m = -1. Na základě tohoto vztahu bylo ukázáno, že prvně nabývá amplituda pole nulové hodnoty v jiném bodě než jak plyne z klasické teorie reprezentované vztahem (12). S tímto úzce souvisí i problematika rozlišovací schopnosti optických soustav. Výpočet amplitudy pole fyzikálně dokonalé optické soustavy mající numerickou aperturu konečné hodnoty, konstantní amplitudovou propustnost a zobrazující s příčným zvětšením m, je možno provést pomocí obecného vztahu (13), který je zobecněním vztahu (10) a je dostatečně přesný pro většinu v praxi se vyskytujících případů. Z odvozených vztahů je patrno, že *rozptylová funkce optické soustavy závisí na příčném zvětšení a numerické apertuře optické soustavy.*

Práce byla vypracována v rámci grantu č.103/99/0021 GAČR.

Literatura

[1] J.W.Goodman: *Introduction to Fourier Optics*. McGraw-Hill, New York, 1968.
[2] B.Havelka: *Geometrická optika I.* NČSAV, Praha, 1955.
[3] M.Born, E.Wolf: *Principles of Optics*. Oxford University Press, New York, 1964.
[4] M.V.Klein: *Optics*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1970.
[5] A.Mikš: *Aplikovaná optika 10*, Vydavatelství ČVUT, Praha 2000.
[6] K.Rektorys: *Přehled užité matematiky*. SNTL, Praha, 1968.

Doc.RNDr.Antonín Mikš,CSc , Katedra fyziky, FSv ČVUT, Thákurova 7, 166 29 Praha 6.
Tel: (02) 24354948, Fax: (02) 3113226, E-mail: miks@fsv.cvut.cz