

Regulátor NQR pro nelineární oscilátor s analýzou stability

Pavel Steinbauer, Michael Valášek¹

Abstrakt:

V příspěvku je stručně shrnuta a především aplikována metodologie návrhu nelineárního zpětnovazebního stavového regulátoru NQR na benchmark nelineárního oscilátoru - rotačně-translačního aktuátoru RTAC a srovnána s regulátorem LQR.

Protože pro řízení NQR není analyticky prokázána globální stabilita, je k ověření stability regulačního obvodu odvozena a použita numerická metoda, založená na Ljapunovově teorému.

Pro implementaci návrhových algoritmů je použito prostředí Matlab.

Úvod

V posledních letech dochází k bouřlivému rozvoji mechatroniky a na trh přichází řada mechatronických výrobků (kompaktní fotoaparáty, automatické pračky apod.) i aplikaci mechatroniky do výrobků existujících (nekývající jeřáb, osobní automobil s ABS, ESP). Mechatronický systém je synergickou kombinací mechanických a řídicích systémů, které jsou realizovány počítačovým systémem a působí elektronickými akčními členy.

Mechatronické řešení často vyžaduje změnu konstrukce tak, aby byl systém lépe říditelný. Lepší říditelnost ve smyslu rychlé změny stavu mnohdy znamená, že je systém blízko meze stability, což ovšem přináší zvýšené nároky na metody návrhu a ověřování zákonů řízení. Navíc je pro mechatronické systémy je typický pohyb – přemístění ve velkém rozsahu (pojízďející jeřáb, přesun hlavičky pevného disku apod.). Navíc mechatronický systém obvykle obsahuje podstatné nelinearity, jež často ani není možné linearizovat (řízený asymetrický tlumič).

Obvyklé přístupy k návrhu řízení (PID, linearizace+lineární regulátor apod.) tak často nevyhoví požadavkům na chování řízeného systému. Proto je třeba rozvíjet metody návrhu nelineárního regulátoru. Návrh nelineárního regulátoru není jednoduchý a doposud pro něj neexistuje obecná metodika. Je k dispozici celá řada metod pro různé třídy systémů a typy úloh.

V tomto článku je diskutováno řízení nelineárního systému pomocí nelineárního kvadratického regulátoru (NQR), které lze použít pro širokou třídu systémů popsaných rovnicemi ve tvaru

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (1)$$

pokud

$$f(x, u) \Big|_{x=0} = 0 \quad (2)$$

Metoda řízení NQR

Metoda NQR vychází z metod optimálního řízení a byla odvozena na základě analogie s metodou LQR pro lineární systémy. Cílem syntézy NQR je pro dynamický systém

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(x) \cdot x + g(x) \cdot u \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \quad (3)$$

¹ Ústav mechaniky, Fakulta strojní, ČVUT v Praze, Karlovo nám. 13, 121 35 Praha 2, e-mail steinb@fsik.cvut.cz

navrhnout stavově závislé koeficienty stavové zpětné vazby

$$u = K(x) \cdot x \quad (4)$$

která minimalizuje kvadratické kritérium optimality

$$J = \int_0^{\infty} (x^T \cdot Q(x) \cdot x + u^T \cdot R(x) \cdot u) dt \quad (5)$$

a stabilizuje systém (3) v rovnovážném stavu $x=0$.

Za podmínek, že matice $Q(x)$ a $R(x)$ jsou pozitivně definitní, $A(x)$ a $g(x)$ jsou spojité maticové funkce, pár $(A(x), g(x))$ je říditelný (stabilizovatelný) ve smyslu lineárních systémů, tedy hodnota matice

$$\begin{bmatrix} g(x) \cdot A(x) \cdot g(x) & \dots & A^{n-1}(x) \cdot g(x) \end{bmatrix} \text{ pro } \forall x \in \mathfrak{R}^n \quad (6)$$

je n (počet stavů systému), pár $(\sqrt{Q(x)}, A)$ je pozorovatelný pro $\forall x \in \mathfrak{R}^n$ (tedy všechny módy stavů systému jsou obsaženy v kritériu (5)), existuje řízení a trajektorie $(u(t), x(t))$ $t \in [0, \infty)$ vyhovující popisu systému (3) pro které je funkcionál (5) konečný, všechny stavy jsou měřitelné a vstupní proměnné u nejsou omezeny, můžeme z Bellmanova principu dynamického programování ([Kubík, 1972]) pro neomezený akční zásah u odvodit ([Valášek, 1998], [Steinbauer, 2002])

$$u^* = -R^{-1} g(x)^T \frac{\partial V}{\partial x} \quad (7)$$

kde $\frac{\partial V}{\partial x} = Pp(x) \cdot x$ a matici $Pp(x)$ získáme řešením stavově závislé Riccatiho rovnice

$$0 = Q(x) - Pp(x) g(x) R(x)^{-1} g(x)^T Pp(x) + Pp(x) A(x) + A(x)^T Pp(x) \quad (8)$$

Rovnici (8) je ovšem třeba řešit v každém bodě stavového prostoru.

Transformace obecného stavového popisu

Metoda NQR používá stavový popis systému ve tvaru (3). Obecný systém (1) může být do tvaru (3) transformován, pokud splňuje podmínku (2). V publikovaných pracích je obvykle tato transformace prováděna intuitivně.

Transformace (1) na (3) však není jednoznačná. Bylo odvozeno několik metod transformace, které umožňují tuto nejednoznačnost parametrizovat ([Valášek, 1999], [Steinbauer, 2002]). Tato parametrizace se stává dalším návrhovým parametrem řízení.

Jednou z relativně málo výpočetně náročných variant je A-dekompozice.

Funkce $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, která má v počátku hodnotu $f(0, 0, \dots, 0) = 0$, může být dekomponována

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = A(x) \cdot x \quad (9)$$

kde $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ takto

$$A(x) = \begin{bmatrix} \frac{f_{A,1}(x_1, x_2, \dots, x_n)}{x_1} & \frac{f_{A,2}(x_1, x_2, \dots, x_n)}{x_2} & \dots & \frac{f_{A,n}(x_1, x_2, \dots, x_n)}{x_n} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Funkce $f_{A,1}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ až $f_{A,n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ se vypočtou následujícím postupem, který sestává z maximálně n kroků. V prvním kroku je vypočteno

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1 + f_{A,1} \quad (11)$$

kde

$$f_1 = f(x_1, x_2, \dots, x_n)_{x_1=0} = f(0, x_2, \dots, x_n) \quad (12)$$

a

$$f_{A,1} = f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f_1 = f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(0, x_2, \dots, x_n) \quad (13)$$

Jestliže f_{k-1} z předchozího $(k-1)$ -ho kroku je nenulová funkce, potom se pokračuje k -tým krokem, jinak je A-dekompozice ukončena. V k -tém kroku je vypočteno

$$f_{k-1} = f_k + f_{A,k} \quad (14)$$

kde

$$f_k = f_{k-1, x_k=0} = f(0, \dots, 0, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)_{x_k=0} = f(0, \dots, 0, 0, x_{k+1}, \dots, x_n) \quad (15)$$

a

$$f_{A,k} = f_{k-1} - f_k = f(0, \dots, 0, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) - f(0, \dots, 0, 0, x_{k+1}, \dots, x_n) \quad (16)$$

Popsaný výpočet A-dekompozice závisí na pořadí proměnných v jejich výčtu x_1, x_2, \dots, x_n . Může být změněn změnou pořadí výčtu x_1, x_2, \dots, x_n .

Tento rozklad lze provést i v případě, že systém není popsán analytickými výrazy, ale kupříkladu aproximován naměřenými tabulkami či je vyjádřen rozsáhlým programovým kódem.

Ověření stability NQR

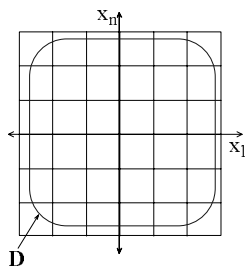
Bohužel, stabilita matice $A(x)$ ve smyslu lineárních systémů (záporné reálné části vlastních čísel matice $A(x)$ v každém bodě stavového prostoru) nezaručuje globální stabilitu nelineárního systému systém (3). Pro ověření stability můžeme použít numerickou metodu založenou na Ljapunovově teorému:

Kandidátem Ljapunovovy funkce je kvadratická forma, založená na matici $Pp(x)$, jež je výsledkem řešení stavově závislé Riccatiho rovnice (8)

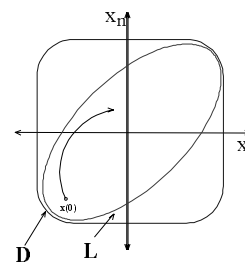
$$V(x) = x^T Pp(x)x \quad (17)$$

Proto je tento kandidát je zaručeně pozitivně definitní (z principu řešení Riccatiho rovnice).

Určíme vyšetřovanou oblast stavového prostoru D , ve které se systém reálně může pohybovat. Tuto oblast pokryjeme sítí bodů (obrázek 1).



obrázek 1 Ilustrace pokrytí vyšetřované oblasti D stavového prostoru sítí bodů



obrázek 2 Ilustrace uzavřené Ljapunovovy plochy v oblasti D

V těchto bodech vyšetříme negativní definitnost časové derivace kandidáta Ljapunovovy funkce

$$\frac{dV(x)}{dt} = x^T \left(A_{Cn}(x)^T P(x) + P(x) A_{Cn}(x) + \frac{\partial P(x)}{\partial x} A_{Cn}(x) x \right) \cdot x \quad (18)$$

kde

$$A_{Cn}(x) = A(x) - g(x)K(x) \quad (19)$$

Vyšetření negativní definitnosti časové derivace Ljap. funkce (18) v dané oblasti zaručí stabilitu rovnovážného stavu. Zaručený region, pro který je rovnovážný stav atraktorem, je možné určit z následující úvahy.

Pro nalezení této oblasti vyjdeme opět z přímé Ljapunovovy metody. Podmínka negativnosti časové derivace Ljapunovovy funkce (18) znamená, že hodnota Ljapunovovy funkce (17) klesá podél každé trajektorie pohybujícího se dynamického systému, který je stabilní ve smyslu Ljapunova.

Pokud tedy ve vyšetřované oblasti stavového prostoru D existuje pro Ljapunovovu funkci (17) (která tedy splňuje podmínku negativní definitnosti časové derivace (18)) uzavřená hyperplocha uzavírající rovnovážný stav

$$L: V(x) = c \quad (20)$$

nazývaná Ljapunovova plocha, máme jistotu, že trajektorie systému počínající uvnitř Ljapunovovy plochy tam také zůstane, popř. se bude asymptoticky přibližovat rovnovážnému stavu (viz obrázek 2).

Je tedy možné transformovat hledání regionu atraktivity na nalezení Ljapunovovy plochy, která je uzavřená a plně obsažená ve vyšetřované oblasti D. Algoritmus pro případ, kdy oblast D má tvar nadkvádrů, je podrobně popsán v [Steinbauer, 2002]. Tato oblast je oblastí zaručené atraktivity. Skutečná oblast je větší, metoda je tedy poměrně konzervativní.

Příklad RTAC

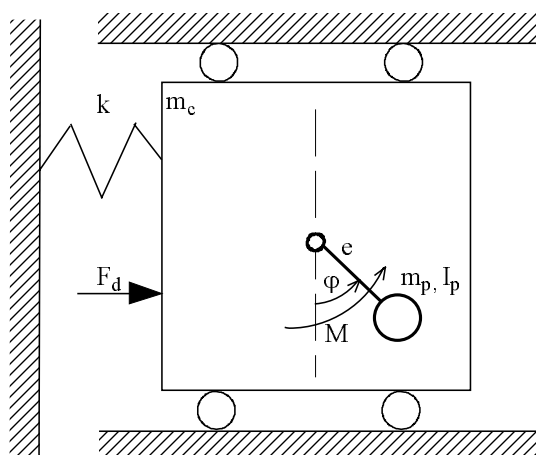
Popis problému

Jedná se srovnávací testovací případ pro nelineární řízení ([Bupp, 1998]). Mechanismus (obrázek 3) se pohybuje pouze ve vodorovné rovině, tedy se neuplatňuje působení tíhové síly, ale pouze účinky dynamických sil. Pohyb vozíku je dán posuvnou vazbou. Uvnitř vozíku je k němu rotační vazbou upevněno kyvadlo o délce e , hmotnosti m_p a momentem setrvačnosti I_p a je poháněno pohonem s momentem M . Vozík je spojen s rámem pružinou o tuhosti k . Síla F_d působící na vozík je poruchovou veličinou systému.

Cílem řízení je stabilizovat systém v rovnovážné poloze, tedy utlumit vibrace oscilátoru.

Mechanismus popisuje soustava diferenciálních rovnic 2. řádu

$$\begin{aligned} (m_p + m_c)\ddot{z} + m_p e \ddot{\varphi} \cos \varphi &= m_p e \dot{\varphi}^2 \sin \varphi - kz + F_d \\ m_p e \cos \varphi + (I_p + m_p e^2)\ddot{\varphi} &= M \end{aligned} \quad (21)$$



obrázek 3 Schéma nelineární úlohy RTAC

Ty lze snadno transformovat do tvaru ($u = M$)

$$\dot{x} = f(x) + g(x).u \quad (22)$$

kde stavový vektor $x = [z, \dot{z}, \varphi, \dot{\varphi}]$ a $f(x)$, $g(x)$ jsou vektorové funkce se složkami

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \dot{z} \\ f_2(x) &= \frac{(I_p + m_p e^2)(m_p e \dot{\varphi}^2 \sin \varphi - kz)}{(m_p + m_c)(I_p + m_p e^2) - m_p^2 e^2 \cos^2 \varphi} \\ f_3(x) &= \dot{\varphi} \\ f_4(x) &= \frac{(-m_p e \cos \varphi)(m_p e \dot{\varphi}^2 \sin \varphi - kz)}{(m_p + m_c)(I_p + m_p e^2) - m_p^2 e^2 \cos^2 \varphi} \end{aligned} \quad (23)$$

a

$$\begin{aligned} g_1(x) &= 0 \\ g_2(x) &= \frac{-m_p e \cos \varphi}{(m_p + m_c)(I_p + m_p e^2) - m_p^2 e^2 \cos^2 \varphi} \\ g_3(x) &= 0 \\ g_4(x) &= \frac{1 - m_p^2 e^2 \cos^2 \varphi}{(I_p + m_p e^2)((m_p + m_c)(I_p + m_p e^2) - m_p^2 e^2 \cos^2 \varphi)} \end{aligned} \quad (24)$$

Hodnoty parametrů jsou

$$m_c = 1.3608 \text{ kg}, m_p = 0.096 \text{ kg}, e = 0.0592 \text{ m}, I_p = 0.0002175 \text{ kgm}^2, k = 186.3 \text{ Nm}^{-1}, \quad \text{systém}$$

neobsahuje žádné tlumení.

Při návrhu regulátoru byly použity stavová zpětná vazba lineární, navržená metodou LQR a nelineární, navržená metodou NQR ([Steinbauer, 2002]).

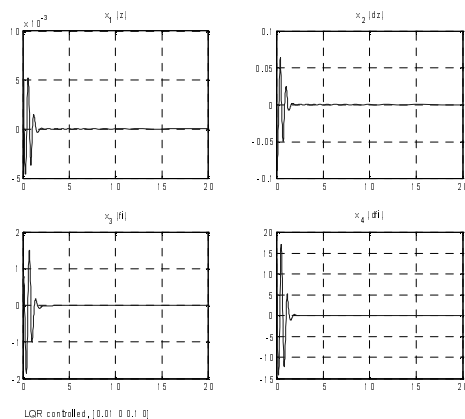
Váhové matice byly zvoleny konstantní, pro LQR i NQR stejné

$$Q = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.001 \end{bmatrix}, R = [1] \quad (25)$$

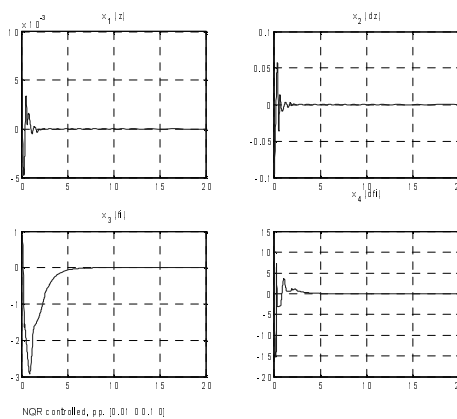
Tedy bylo především preferováno uklidnění vozíku před uklidněním rotující hmoty. Pro rozklad systému (22) do tvaru (3) byla použita A-dekompozice s pořadím stavových proměnných při rozkladu [1 2 3 4].

Výsledky

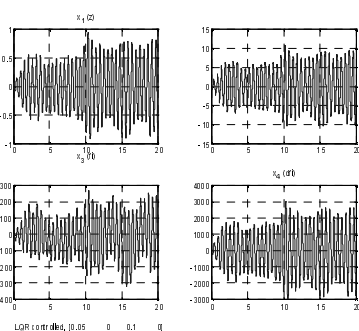
Lineární zpětnovazební řízení systém stabilizovalo ve velmi blízkém okolí počátku stavového prostoru, obrázek 4 to dokumentuje pro vektor počátečních podmínek [0 0.1 0 0.1]. Pohyb systému z jen o málo vzdálenějšího bodu stavového prostoru [0.05 0 0.1 0] je však již nestabilní a nevyhovující (obrázek 6).



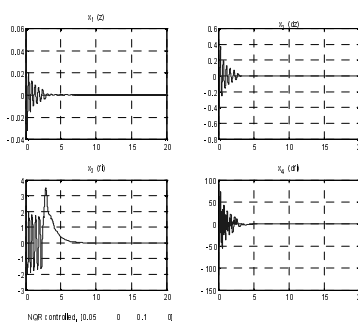
obrázek 4 Průběh stavových veličin systému RTAC řízeného regulátorem LQR



obrázek 5 Průběh stavových veličin systému RTAC řízeného regulátorem NQR



obrázek 6 Průběh stavových veličin systému RTAC řízeného regulátorem LQR

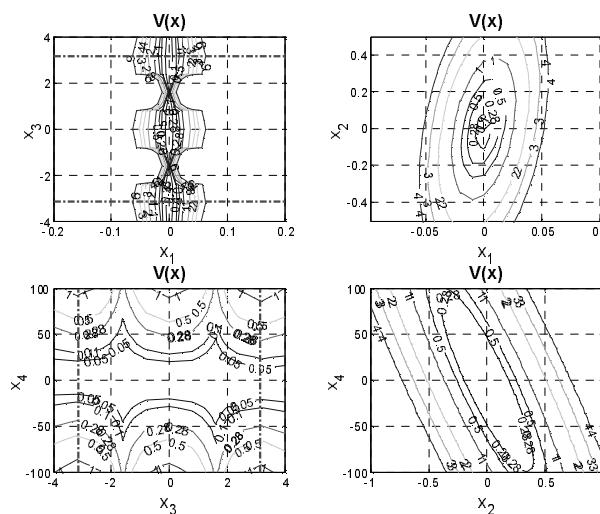


obrázek 7 Průběh stavových veličin systému RTAC řízeného regulátorem NQR

Oproti tomu při použití stavově závislého stavového regulátoru NQR bylo dosaženo stabilizujícího chování a, v případě počátečních podmínek, pro které systém stabilizovalo i LQR, i výrazně výhodnějšího průběhu stavového vektoru (z porovnání obrázek 4 - obrázek 5 a obrázek 6 a obrázek 7).

Ověření stability řízeného systému bylo provedeno metodou, načrtnutou v úvodu tohoto článku. Na první pohled takto získaná Ljapunovova funkce nemá uzavřenou Ljapunovovu plochu (obrázek 8) a nelze tak s jistotou nalézt ani pesimistický odhad regionu atraktivity rovnovážného stavu. Pokud však uvážíme, že stavová proměnná x_3 (úhel natočení kyvadla), je periodická s intervalem $\langle -\pi, \pi \rangle$, tedy stav x_3 je vždy omezený, nalezneme i omezenou Ljapunovovu plochu ve vyšetřované oblasti s hodnotou Ljapunovovy funkce 0.28, kde na ose x_3 je Ljapunovova plocha omezena intervalem $\langle -\pi, \pi \rangle$ (v obrázku naznačeno čerchovanou čarou).

Simulačně ověřené chování řízeného systému také ukazuje (podobně jako ve všech doposud známých aplikacích NQR), že NQR je stabilizující řízení.



obrázek 8 Ljapunovovy plochy pro RTAC v osových řezech

Závěr

Pro již dříve publikovanou metodu návrhu stavově závislé, stavové zpětné vazby NQR není doposud prokázána globální stabilita. V této práci je stručně uvedena numerická metoda vyšetření stability systému řízeného regulátorem NQR. Pro testovací příklad RTAC je navrženo nelineární řízení NQR, které významně překonává výsledky řízení lineárním regulátorem. Dále je ověřena stabilita tohoto řízení a určen zaručený region atraktivity rovnovážného stavu.

Literatura

- Mracek, C. P., Cloutier, J.R.: "Missile longitudinal autopilot design using the state-dependent Riccati equation method", In Proceedings of the International Conference on Nonlinear Problems in Aviation and Aerospace, University Press, EmbryRiddle Aeronautical University, Daytona Beach, 1996
- Valasek, M., Steinbauer, P.: "Nonlinear Control of Multibody Systems", In: Ambrosio, J., Schiehlen, W. (eds.): Proc. of Euromech Colloquium 404, Advances in Computational Multibody Dynamics, Lisbon 1999, pp. 437-444
- Bupp, R. T., Bernstein, D. S., Coppola, V. T.: „A Benchmark Problem for Nonlinear Control Design“, International Journal of Robust and Nonlinear Control, 8, 307-310, 1998
- Steinbauer, P.: „Nelineární řízení nelineárních mechanických systémů“, dizertační práce, ČVUT v Praze, 2002