

# VYUŽITÍ MATLABU VE VÝUCE MECHANIKY NA FAKULTĚ ELEKTROTECHNICKÉ ČVUT

Jiří Vondřich

Katedra mechaniky a materiálů, Fakulta elektrotechnická, ČVUT Praha,

## Úvod

Katedra mechaniky a materiálů zalištuje výuku mechaniky pro obor Kybernetika v předmětech Dynamika procesů v 5 semestru a Dynamika mechanických soustav v 6 semestru v rozsahu dvě hodiny přednášek a dvě hodiny cvičení. V předmětu Dynamika procesů jsou studenti seznámeni na začátku ze základy statiky a kinematiky, pak následuje dynamika se zaměřením na dynamiky soustav. V závěru semestru jsou ještě seznámeni krátce hydromechanikou a termomechanikou. V předmětu Dynamika mechanických soustav jsou seznámeni s vytvářením náhradního modelu zařízení, jeho popsáním matematickými rovnicemi, simulací vstupních dat a numerickým řešením pomocí výpočetního programu Matlab.

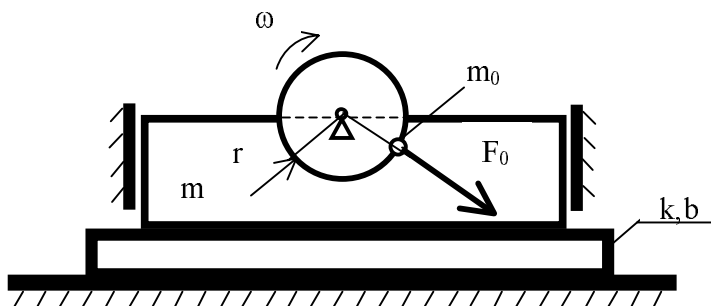
Na cvičeních, po krátkém seznámení s Matlabem, studenti již sestavují v úvodních cvičeních dle vzorů jednoduché programy či schémata pro řešení průběhů jednoduchých funkcí a algebraických a diferenciálních rovnic. Dále již následuje řešení modelů mechanických, popřípadě též hydromechanických a termomechanických soustav. Student vytvoří a prokonzultuje s vyučujícím náhradní schéma soustavy, matematické popsání, sestavení programu v Matlabu, či schématu v Simulinku (př.1 a 2), jeho odladění, simulaci vstupních dat a požadované výsledky ve formě grafů. Studenti mají k dispozici sborník příkladů mechanických a hydromechanických soustav, s náhradními modely, matematickým popisem a programem v Matlabu, popř. Simulinkové schéma a výsledném řešení ve formě grafů. Na webových stránkách katedry jsou rovněž tyto vzorové příklady k dispozici.

Průběhy hnacích momentů jsou u stejnosměrných motorů aproximovány funkcí  $M_H = M_0 - B_0 \omega$ , ( $M_0$  - rozběhový moment,  $B_0$  - konstanta a  $\omega$  - úhlová rychlost) a u asynchronních motorů vztahem (tzv. Klossovou momentovou charakteristikou)  $M_H = 2M_0 \sigma s / (\sigma^2 + s^2)$ , kde  $s = 1 - \omega / \omega_{syn}$  je skluz vůči synchronní rychlosti  $\omega_{syn}$ ,  $\sigma$  parametr, který udává hodnotu skluzu, při které je  $M_0$  maximální.

Simulací provozních podmínek je pak možné získat vhodné vstupní parametry (např. tuhosti a tlumení jednotlivých členů, hnací síly a momenty ap.), nebo naopak požadované výstupní parametry (např. trajektorie, rychlosti a zrychlení ap.) a parametry pro návrh řídicí jednotky ovládající například hnací jednotky soustavy.

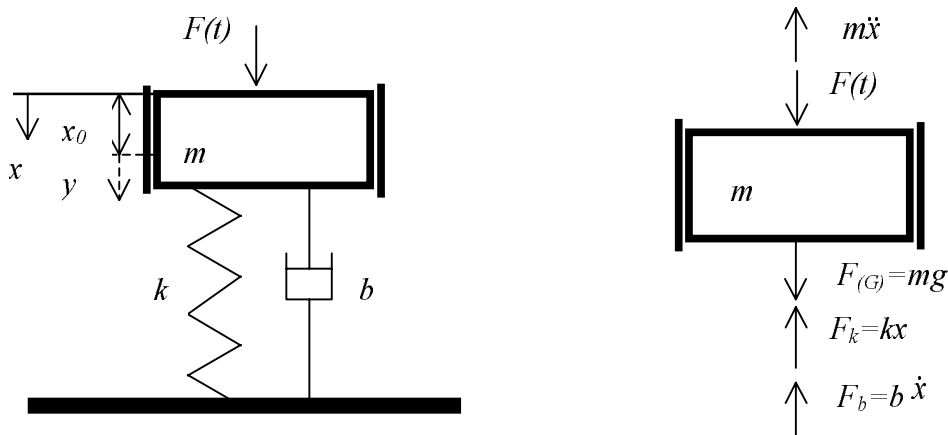
## Ukázky řešení

### 1) ZAŘÍZENÍ S NEVYVÁŽENOU HMOTOU ULOŽENÉ NA PRUŽNÉ PODLOŽCE (posouzení vlivu $F_0$ , $k$ a $b$ na chování systému)



Obr. 1 Strojní zařízení uložené na základě s pružnými a tlumícími vlastnostmi

Náhradní model:



Obr.2 Model strojního zařízení

Pohybová rovnice:

$$m\ddot{x} + F_k + F_b - F(t) - F_{(G)} = 0$$

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = mg + F(t)$$

$$F(t) = F_0 \sin(\omega t) = m_0 r \omega^2 \sin(\omega t)$$

Rovnovážný stav  $x_0$  při působení  $F_{(G)}$ :

$$kx_0 = F_{(G)} \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{mg}{k}$$

$$y = x - x_0 \quad \Rightarrow \quad x = y + x_0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = \dot{y}, \quad \ddot{x} = \ddot{y}$$

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + k(y + x_0) = mg + F(t)$$

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = F(t) + mg - kx_0 \quad mg - kx_0 = 0$$

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = F(t)$$

Zavedeme stavové proměnné  $y$ ,  $v$ :

$$\dot{y} = v,$$

$$\dot{v} = -\frac{k}{m}y - \frac{b}{m}v + \frac{1}{m}F(t).$$

V maticovém tvaru:

$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} F(t) \quad (1)$$

## Přenos systému

$$G(s) = \frac{Y(s)}{\mathfrak{F}(s)}$$

$Y(s)$  - obraz výstupní výchylky  $y(t)$ ,

$\mathfrak{F}(s)$  - obraz působící síly  $F(t)$ .

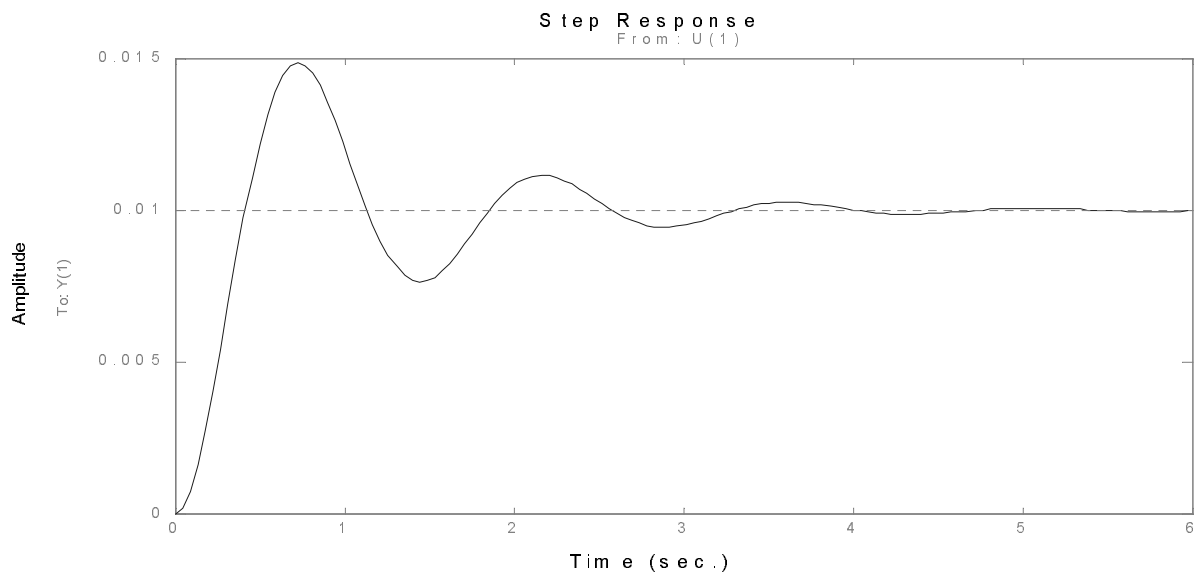
P.p.  $y = 0, \dot{y} = 0$

$$mY(s)s^2 + bsY(s) + kY(s) = \mathfrak{F}(s),$$

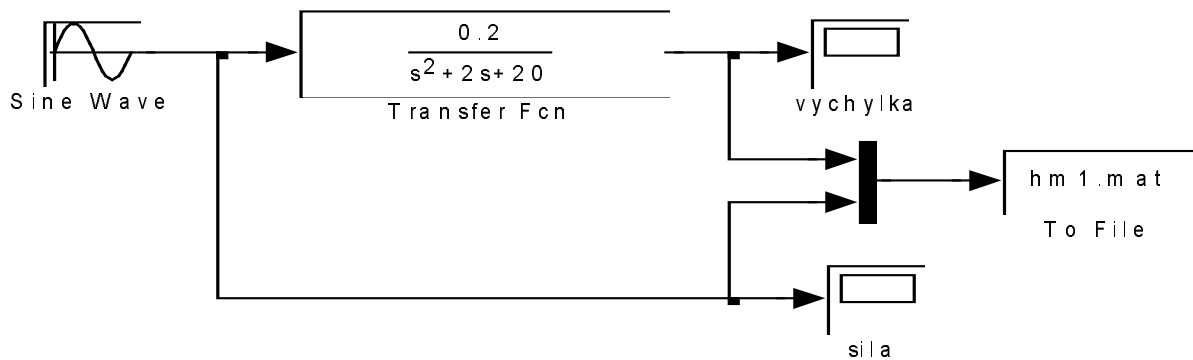
$$G(s) = \frac{1}{ms^2 + bs + k} = \frac{\frac{1}{k}}{\frac{m}{k}s^2 + \frac{b}{k}s + 1}. \quad (2)$$

Výpis mfile se simulací stavového modelu (1) a jeho převodem na přenos (2) je

```
%pružně uložené těleso s tlumičem
m=5;k=100;b=10 %hmotnost [kg], tuhost [N/m],
tlumeni Nm/s
A=[0 1 ; -k/m -b/m];B=[0;1/m];C=[1 0];D=[0];%pohyb. rov.
v matic. tvaru
step(A,B,C,D); %výpočet, vykreslení přechodové
charakteristiky
grid; %mřížka grafu
[num,den]=ss2tf(A,B,C,D) %převod stavového modelu na
přenos
%G(s)=num(s)/den(s), num, den-vek
%koeficientů od nejvyšší mocniny
[AA,BB,CC,DD]=tf2ss(num,den); %převod přenosu na
stavový model
printsys(AA,BB,CC,DD) %vykreslení stavového
modelu
```



Obr.4 Přechodová charakteristika – strojní zařízení uložené na základě s pružnými a tlumícími vlastnostmi



Obr.5 Simulinkový model pružně uloženého zařízení

### Hodnoty parametru tělesa:

$m = 5 \text{ kg}$   
 $k = 100 \text{ Nm}^{-1}$   
 $b = 10 \text{ Nm}^{-1}\text{s}$   
 $m_1 = 0,001 \text{ kg}$   
 $r = 0,05 \text{ m}$   
 $n = 2800 \text{ ot/min}$

**M file sloužící pro vykreslení výsledků, které jsou uloženy v souboru hm1.mat:**

```

%zobrazení výsledků

load hm1.mat;

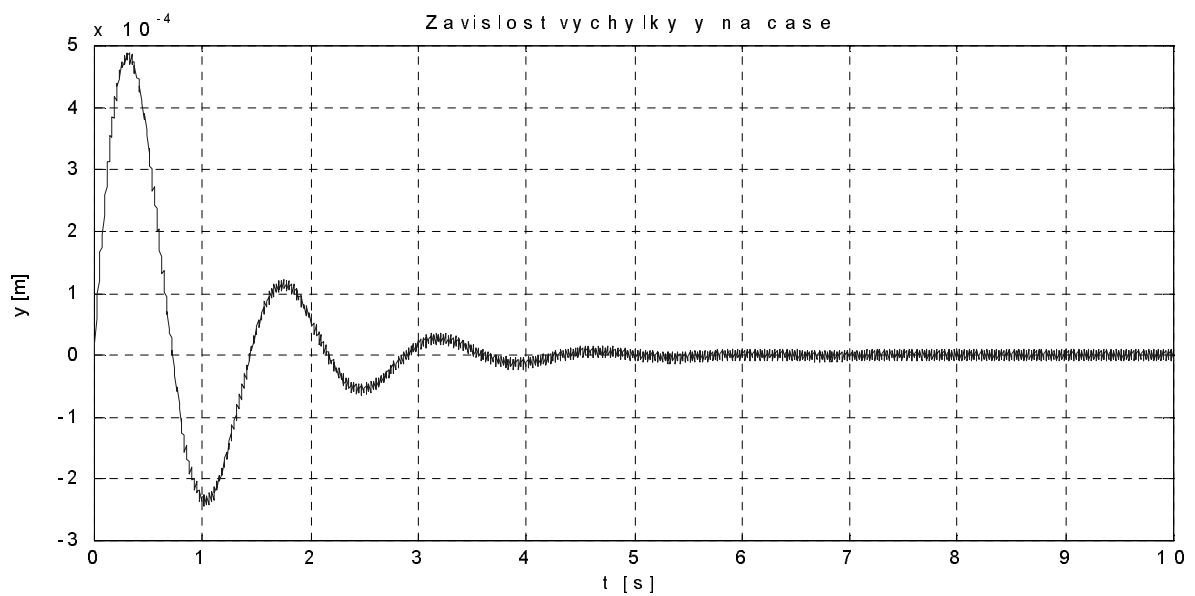
figure;
plot(vysl(1,:),vysl(2,:));
title('Zavislost vychylky y na case');
xlabel('t [s]');
ylabel('y [m]');
grid;

figure;
plot(vysl(1,:),vysl(3,:));
title('Vstupni sila');
xlabel('t [s]');
ylabel('F [N]');
grid;

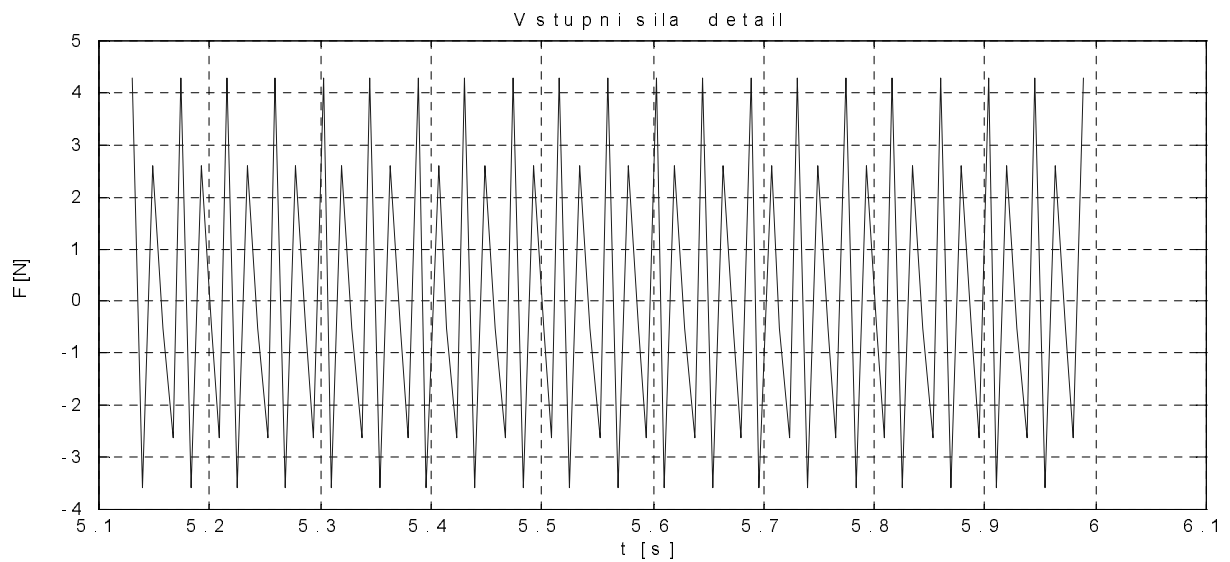
ma=vysl(:,600:1:700)

figure;
plot(ma(1,:),ma(3,:));
title('Vstupni sila detail');
xlabel('t [s]');
ylabel('F [N]');
grid;

```

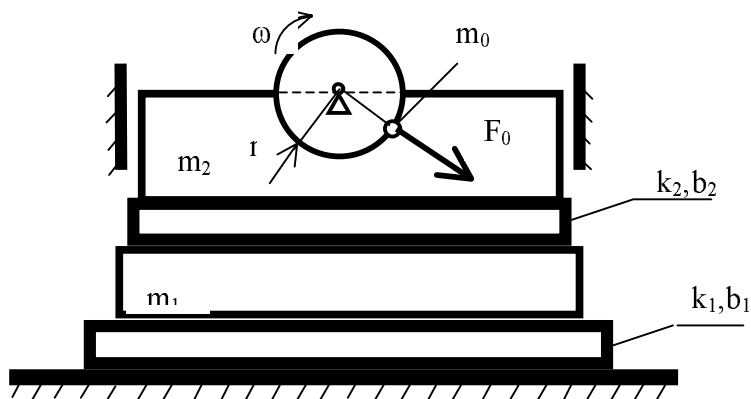


Obr. 6 Průběh výchylky  $y$

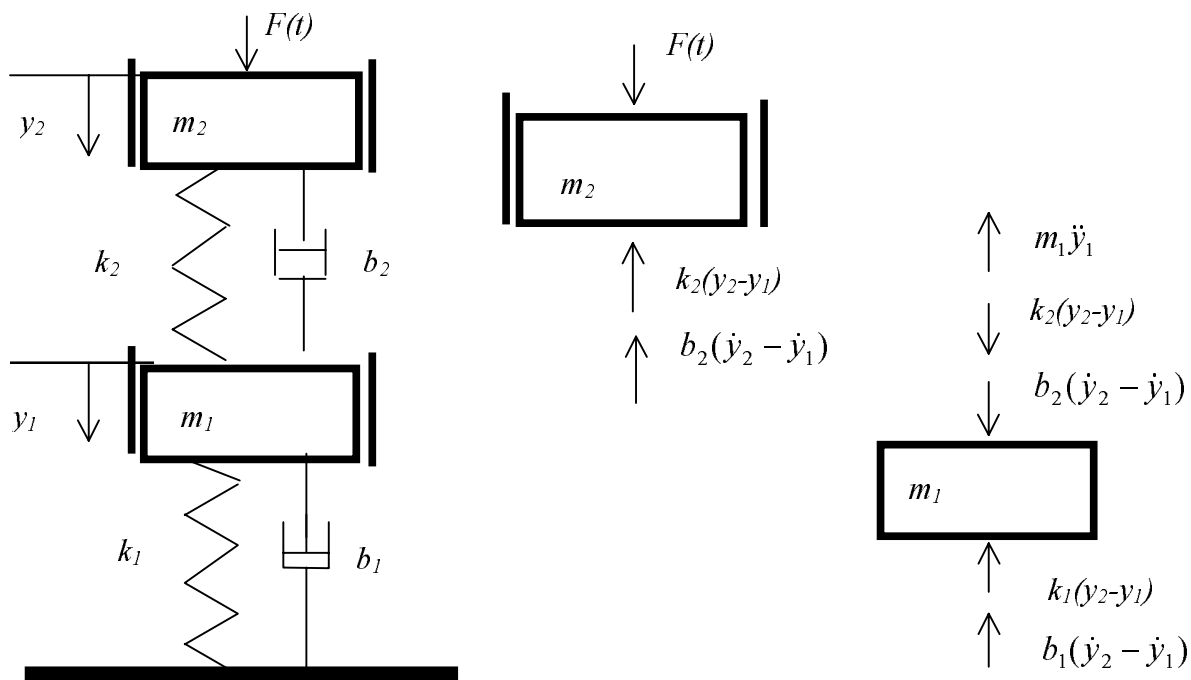


Obr.7 Průběh zatěžující síly  $F(t)$

**2) ZAŘÍZENÍ S NEVYVÁŽENOU HMOTOU ULOŽENÉ NA DVOU PRUŽNÝCH PODLOŽKÁCH** (posouzení vlivu  $F_0$ ,  $k$  a  $b$  na chování systému)



Obr. 1 Strojní zařízení uložené na dvou pružných podložkách



Obr.2 Model strojního zařízení 2 hmotové soustavy s pružnými a tlumícími prvky

Pohybové rovnice soustavy, uvažujeme-li výchylky od rovnovážného stavu jsou:

$$m_1 \ddot{y}_1 = k_2(y_2 - y_1) + b_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) - k_1 y_1 - b_1 \dot{y}_1$$

$$m_2 \ddot{y}_2 = -k_2(y_2 - y_1) - b_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) - F(t)$$

kde  $F(t) = F_0 \sin(\omega t) = m_0 r \omega^2 \sin(\omega t)$ .

Zavedeme-li stavové proměnné  $y_1, v_1, y_2, v_2$  je možné zapsat pohybové rovnice ve tvaru

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{v}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1 + k_2}{m_1} & -\frac{b_1 + b_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & \frac{b_2}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k_2}{m_2} & \frac{b_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & -\frac{b_2}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ v_1 \\ y_2 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} F(t) \quad (1)$$

Výpis mfile se simulací strojního zařízení 2 hmotové soustavy s pružnými a tlumícími prvky:

```

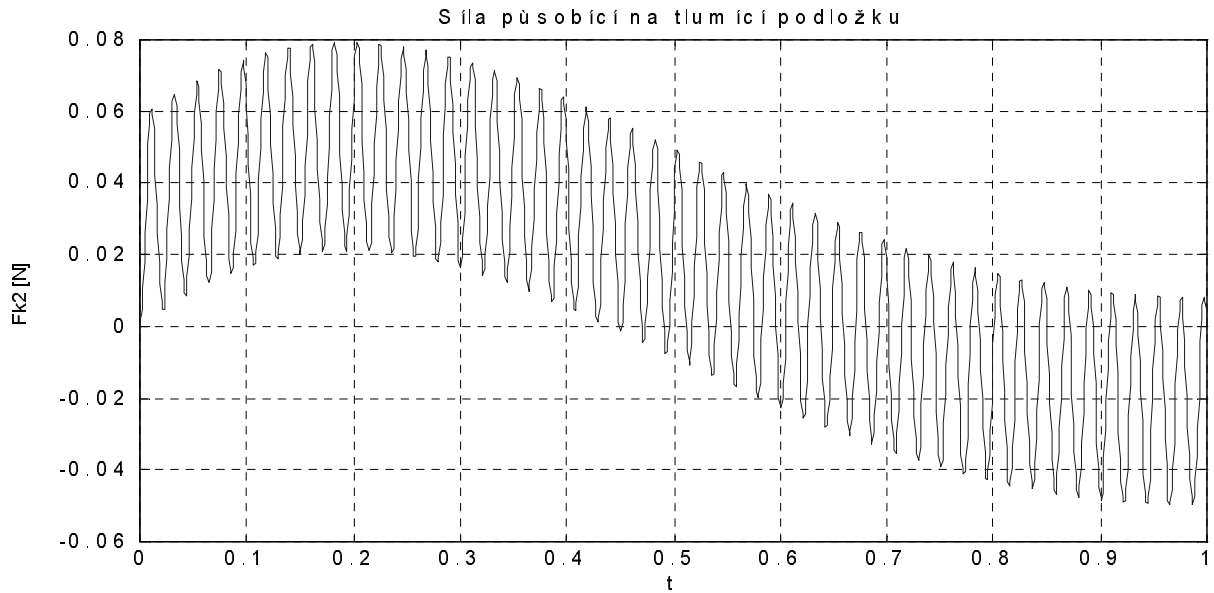
m0=0.001;
m1=30;
m2=5;
r=.05;
k1=1000;
k2=100;
b1=100;
b2=10;
n=2800;
A=[0 1 0 0; -(k1+k2)/m1 -(b1+b2)/m1 k2/m1 b2/m1; 0 0 0 1; k2/m2
b2/m2 -k2/m2 -b2/m2];
B=[0; 0; 0; 1/m2];
C=[-k2 -b2 k2 b2];
D=[0];
t=0:0.001:1;
F=4.3*sin(293*t);

```

```

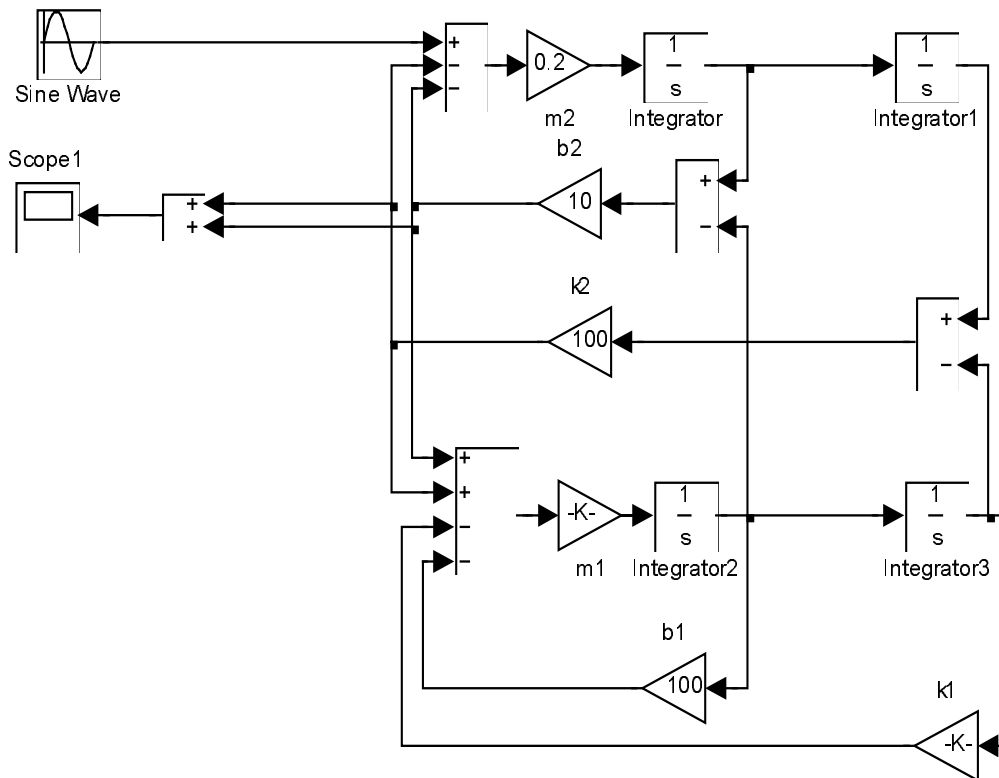
t;
[y,x]=lsim(A,B,C,D,F,t);
plot(t,y);grid;
title('Síla působící na tlumící podložku');
xlabel('t');ylabel('Fk2 [N]');

```



Obr.1 Průběh síly působící na podložku v závislosti na čase ( Matlab)

Simulinkový model zařízení s nevyváženou hmotou na dvou pružných podložkách:



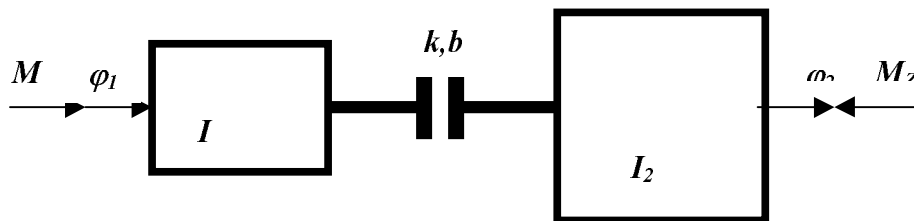
Obr. 3 Simulinkové schéma modelu

Obdobným způsobem jsou ve sborníku a na webových stránkách řešeny níže uvedené příklady mechanických a hydromechanických soustav. V článku je uveden jen stručný popis, úplné řešení je uvedeno v [1],[2].

### 3) MECHANICKÁ SOUSTAVA POHÁNĚNÁ STEJNOSMĚRNÝM MOTOREM S PRUŽNOU SPOJKOU

Hřídelové spojky umožňují spojení výstupního hřídele hnací části stroje s vstupním koncem hřídele hnané části stroje (Obr.1). Na vstupní část stroje působí hnací moment  $M_h$ . V případě, že hnaná část stroje je zatížena nerovnoměrně, například prudce vzrůstajícím zatěžovacím momentem  $M_z$  je vhodné použít pružnou spojku doplněnou tlumícím členem a soustavu řešit jako dynamicky namáhaný torzní systém.

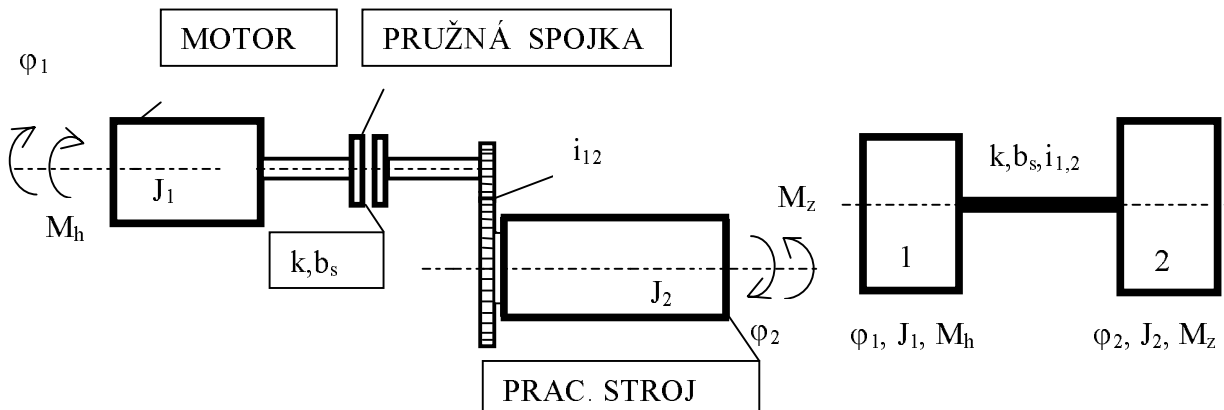
Model stroje s pružnou spojkou pak představuje dvoumotovou torzní soustavu, kde nahrazení hnací části stroje ( včetně hnacího členu spojky ) a poháněné části stroje je provedeno tuhým rotačním tělesem o momentu setrvačnosti  $I_1$ , popř.  $I_2$ . Soustava se řeší zjednodušeně jako dvoumotový dynamický torzní systém, u kterého je nutné provést redukcí hmotnosti na hřídel spojky. U spojky se předpokládají pružné a tlumící vlastnosti dané torzní tuhostí spojky  $k$  a součinitelem tlumení  $b$ .



Obr.1 Model mechanické soustavy poháněné stejnosměrným motorem s pružnou spojkou

### 4) STROJ S PŘEVODOVKOU A SPOJKOU S PRUŽNÝMI A TLUMÍCÍMI VLASTNOSTMI, POHÁNĚNÝ ASYNCHRONNÍM MOTOREM

Strojní zařízení je složitý dynamický systém skládající z řídicí jednotky, z navzájem propojených strojních částí a podskupin a z pohonné a pracovní jednotky. Postup spočívá v sestavení modelu strojního zařízení (Obr.1b), jeho matematického popisu rovnicemi (1), (2) a numerického řešení pomocí SW MATLAB. Simulací vstupních a výstupních hodnot je pak možné provést návrh parametrů zařízení. SW MATLAB umožňuje simulaci různých momentových charakteristik hnacích motorů (např. sledování chování soustavy při rozběhu s hnacím momentem s charakterem motoru s cizím buzením, popř. buzení soustavy momentem s nelineární charakteristikou asynchronního motoru) a rovněž simulaci různých průběhů zatěžujících momentů.



Obr.1a Schéma strojního zařízení

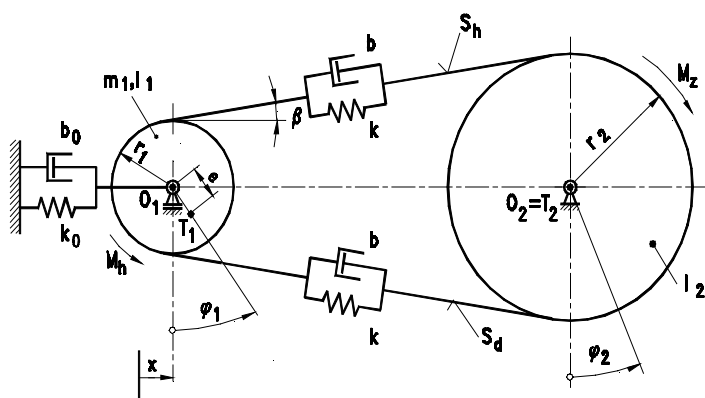
Obr.1b Náhradní model



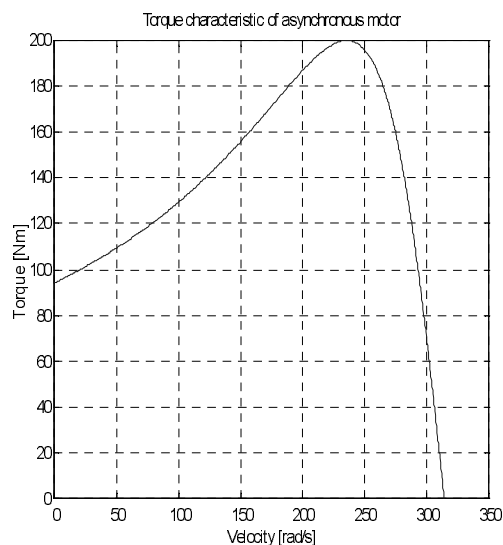
Mechanické schéma vyšetřovaného strojního zařízení je na obr. 1a. Skládá se z hnacího asynchronního motoru, pružné spojky (konstanta tuhosti  $k$  a tlumení  $b_s$ ), převodovky s převodem s převodovým poměrem  $i_{12}$  a pracovního stroje, na který působí krátkodobě po dobu 0,6 s zátěžový moment  $M_z$

### 5) Model pružného řemenového převodu hnaného asynchronním motorem

Asynchronní motor (Obr.2) pohání nevyvážené řemenové kolo 1 (Obr.1) řemenového převodu s pružným řemenem. Simulací různých zatěžovacích momentů působících na řemenové kolo 2 je možné určit síly v horní a dolní části řemene.



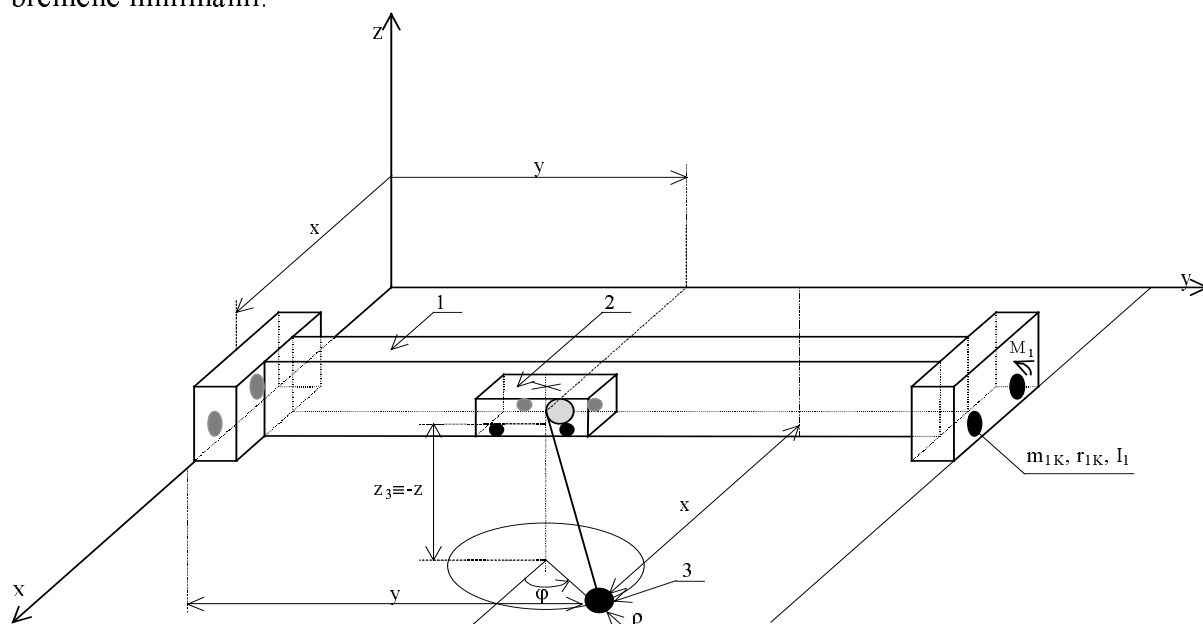
Obr.1 Model řemenového převodu



Obr.2 Hnací moment asynchronního motoru

### 6) Model mostového jeřábu s 5 stupni volnosti

Asynchronní motory pohání pojezd mostového nosníku, mostového vozíku a navíjecí buben pro lano zvedající břemeno. Úkolem je navrhnout řízení motorů tak, aby při plynulém rozjezdu a dojezdu mostového nosníku, jeřábového vozíku a zdvihu břemene byla výchylka břemene minimální.



Obr.1 Model jeřábového mostu

