

# NEJISTOTA ODHADU AMPLITUDOVÉHO DFT SPEKTRA

*Martin Novotný, Miloš Sedláček*

České vysoké učení technické v Praze,  
Fakulta elektrotechnická, katedra měření

## 1. Úvod

Frekvenční analýza, čili nalezení frekvenčního spektra signálu, patří k důležitým úlohám v mnoha technických oblastech. S rozvojem číslicové techniky se stále častěji začalo využívat výhod číslicového zpracování signálů (ve frekvenční analýze jde o získání odhadu spektra pomocí DFT). Z tohoto důvodu je vhodné zabývat se otázkou přesnosti odhadu spektra při použití DFT.

V současné době se postupně přechází k novým metodám vyjadřování odchylek měření. Dosavadní *chyby měření* jsou nahrazovány *nejistotami měření*. Z tohoto důvodu považujeme za vhodné stručně problematiku nejistot měření připomenout.

## 2. Nejistoty měření

V praxi nejsou žádná měření, žádná měřicí metoda ani žádný přístroj absolutně přesné. Nejrůznější negativní vlivy, které se v reálném měřicím procesu vyskytují, se projeví odchylkou mezi naměřenou a skutečnou hodnotou měřené veličiny. Výsledek měření se tak vždy pohybuje v jistém „tolerančním poli“ kolem skutečné hodnoty, ale téměř nikdy nenastává ideální ztotožnění obou hodnot. Rozsah hodnot, jež je možno racionálně přiřadit k měřené veličině, charakterizuje parametr nazvaný nejistota měření.

### 2.1 Nejistoty měření - definice

#### 2.1.1 Standardní nejistoty

Nejistotou měření se rozumí k výsledku měření přidružený parametr charakterizující rozptýlení hodnot, které lze odůvodněně pokládat za hodnotu veličiny, která je objektem měření [1].

Základní kvantitativní charakteristikou je standardní nejistota. Je to směrodatná odchylka veličiny, pro níž je nejistota udávána. Standardní nejistoty se podle způsobu svého vyhodnocení dělí na standardní nejistoty typu A stanovené z výsledků opakovaných měření obecně statistickou analýzou série naměřených hodnot a na standardní nejistoty typu B získané jinými způsoby. Standardní nejistoty typu B pocházející z různých zdrojů se slučují do výsledné standardní nejistoty typu B.

#### 2.1.2 Kombinovaná standardní nejistota

V praxi se jen zřídka vystačí s jedním nebo druhým typem nejistoty samostatně. Pak je za potřebí stanovit výsledný efekt kombinovaných nejistot měření obou typů, A i B. Kombinovaná standardní nejistota se získá sloučením standardní nejistoty typu A s výslednou standardní nejistotou typu B:

$$u(x) = \sqrt{u_A^2(x) + u_B^2(x)} \quad (1)$$

kde  $u(x)$  je kombinovaná standardní nejistota,  $u_A(x)$  je standardní nejistota typu A,  $u_B(x)$  je výsledná standardní nejistota typu B.

#### 2.1.3 Rozšířená nejistota

Původně stanovená směrodatná odchylka (tedy i standardní nejistota) představuje např. u nejčastěji používaného normálního rozdělení interval určený s pravděpodobností asi 68 %. Podobně je tomu i u jiných zákonů rozdělení. Aby bylo dosaženo lepšího intervalu pokrytí blížícího se k 100 %, je třeba rozšířit standardní nejistotu činitelem rozšíření  $k_r$  [1]. Pro normální rozdělení  $k_r = 2$  odpovídá úrovni konfidence 95 %,  $k_r = 3$  odpovídá konfidenci 99,7%. Rozšířenou nejistotu lze pak vyjádřit:

$$U = k_r \cdot u \quad (2)$$

kde  $U$  je rozšířená nejistota,  $k_r$  koeficient rozšíření,  $u$  standardní nejistota.  
S rozšířenou nejistotou je nutno uvést činitel rozšíření  $k_r$ .

## 2.2 Zákon šíření nejistot

Pro nepřímá měření lze nejistotu veličiny  $y$  závislé na  $N$  veličinách  $x_i$  určených přímým měřením (jejich odhady a nejistoty jsou známy), je-li známa funkční závislost  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ , určit ze vztahu [1]:

$$u^2(y) = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) \quad (3)$$

kde  $u(y)$  je kombinovaná standardní nejistota veličiny  $y$ ,  $u(x_i)$  standardní nejistota měřené veličiny  $x_i$ . Tento vztah platí pouze pokud jsou veličiny  $x_1$  až  $x_N$  nekorelované. V opačném případě je třeba korelaci do vztahu zahrnout viz [1].

## 2.3 Zdroje nejistot

Měřicí systém se skládá z několika bloků. V případě číslicových systémů jsou to většinou snímače, obvody pro předzpracování signálu, měřicí karta pro sběr dat s vzorkovačem, AČ převodník a počítač vybavený příslušným softwarem. Každý blok měřicího řetězce je zdrojem nejistot, které se šíří s průchodem signálu do následujících bloků a přispívají k výsledné kombinované nejistotě výsledku měření.

My se zaměříme na nejistoty způsobené kvantováním (představující dominantní zdroj nejistot) a jejich šířením algoritmem DFT.

## 2.4 Nejistota způsobená kvantováním

Kvantování je nejčastěji modelováno šumem s rovnoměrným rozložením pravděpodobnosti v rozsahu  $\pm \frac{1}{2}$  kvantizačního kroku. Nejistotu způsobenou kvantováním vzorku můžeme vyjádřit jako směrodatnou odchylku náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením dle vztahu:

$$u_q = \frac{\Delta q}{\sqrt{12}} = \frac{V_{range}}{2^n \cdot \sqrt{12}} \quad (4)$$

kde  $\Delta q$  je nejmenší kvantovací krok,  $V_{range}$  je rozsah AČ převodníku a  $n$  je počet bitů AČ převodníku.

U reálných AČ převodníků se nelze spolehnout na rozlišení odpovídající nominálnímu počtu bitů, skutečné rozlišení je menší a popisuje ho parametr zvaný efektivní počet bitů  $n_{ef}$  [2]. Pomocí  $n_{ef}$  můžeme vyjádřit nejistotu získaného vzorku pomocí vztahu [3]:

$$u_q = \frac{V_{range}}{2^{n_{ef}} \sqrt{12}} \quad (5)$$

## 2.5 Nejistota vlastního algoritmu DFT

Vztah (5) určuje nejistotu jednotlivých odebraných vzorků. Nás zajímá jakým způsobem se tato nejistota projeví ve výsledné posloupnosti, kterou získáme aplikací DFT na vstupní vzorky. To zjistíme použitím zákona šíření nejistot (3) na algoritmus DFT.

DFT je definována vztahem [4,5]:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j \frac{2\pi}{N} nk} \quad (6)$$

kde  $x(n)$  je posloupnost  $N$  vzorků a  $X(k)$  je komplexní posloupnost  $N$  vzorků reprezentující spektrum. Posloupnost  $X(k)$  je v obecném případě komplexní a lze ji tedy zapsat jako  $X(k) = R(k) - j I(k)$ . Potom reálnou složku  $R(k)$  a imaginární složku  $I(k)$  můžeme vyjádřit s využitím Eulerova vztahu následovně:

$$R(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot n}{N} k\right) \quad (7)$$

$$I(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot n}{N} k\right) \quad (8)$$

Pomocí těchto složek je možné vyjádřit amplitudovou část spektra:

$$M(k) = |X(k)| = \sqrt{R^2(k) + I^2(k)} \quad (9)$$

Aplikací zákona šíření nejistot zjistíme, jak se projeví nejistota kvantování ve výsledku DFT:

$$u^2(M(k)) = \begin{cases} N \cdot u_q^2 & \text{pro } k = 0 \\ \frac{N}{2} \cdot u_q^2 & \text{pro } k \neq 0 \end{cases} \quad (10)$$

### 3. Odhad amplitudového spektra

Z posloupnosti DFT (respektive z modulu jejích hodnot) chceme získat odhad amplitudového spektra. Pro postup získání odhadu je rozhodující zda se jedná o případ koherentního vzorkování, kdy posloupnost DFT reprezentuje frekvenční spektrum korektně, nebo je to případ nekoherentního vzorkování, při kterém vzniká rozmazání spektra.

#### 3.1 Koherentní vzorkování

Aby nedošlo k rozmazání spektra, je třeba zajistit odebrání celistvého počtu period vstupního signálu. To odpovídá požadavku na splnění podmínky:

$$f_{sig} \cdot N = m \cdot f_{vz} \quad (11)$$

kde  $f_{sig}$  je frekvence signálu,  $N$  je počet vzorků DFT,  $f_{vz}$  je vzorkovací frekvence a  $m$  je přirozené číslo.

Odhady střední hodnoty signálu a amplitudy jednotlivých harmonických složek určíme z modulu spektra:

$$V_0 = \frac{M(0)}{N} \quad (12)$$

$$V_{im} = \frac{2M(i)}{N}, \quad i \neq 0 \quad (13)$$

kde  $V_0$  představuje střední hodnotu a  $V_{im}$  je amplituda  $i$ -té harmonické složky.

Nejistoty těchto odhadů způsobené kvantováním vyjádříme za pomoci (3) dosazením (10):

$$u^2(V_0) = \left( \frac{\partial V_0}{\partial M(0)} \right)^2 \cdot u^2(M(0)) = \left( \frac{1}{N} \right)^2 \cdot u^2(M(0)) = \frac{1}{N} u_q^2 \quad (14)$$

$$u^2(V_{im}) = \left( \frac{\partial V_{im}}{\partial M(i)} \right)^2 \cdot u^2(M(i)) = \left( \frac{2}{N} \right)^2 \cdot u^2(M(i)) = \frac{2}{N} u_q^2 \quad (15)$$

#### 3.2 Nekoherentní vzorkování

V případě, že není splněna podmínka (11), dojde k rozmazání spektra neboli prosakování energie ve spektru [4,5], označované běžně anglickým termínem „leakage“. Tento jev je důsledkem nevhodného výběru vzorků, který má za následek nenávaznost periodického prodloužení na signál v základním intervalu. Energie spektrální čáry odpovídající konkrétní harmonické složce se rozprostře do okolních prvků posloupnosti DFT, jenž představuje vzorkované spektrum.

Leakage tvoří při splnění vzorkovací věty obvykle nejzávažnější složku chyby DFT spektrální analýzy. Možností potlačení je použití oken, kterým se vstupní posloupnost vynásobí. To má za následek soustředění podstatné části energie harmonické složky do menšího počtu sousedních prvků DFT a tím menší vliv na vzdálenější prvky (vzorky spektra).

Nejčastěji se v této souvislosti používají kosinová okénka definovaná vztahem:

$$w_p(n) = \sum_{r=0}^p V_r \cos\left(\frac{2\pi nr}{N}\right) \quad n = 0,1,2,\dots,N-1 \quad (16)$$

kde konstanta  $P$  se nazývá řád okna.

Odhad efektivní hodnoty určité frekvenční složky spektra signálu násobeným kosinovým oknem se získá pomocí následujícího vztahu [6]:

$$V_{ef} = \sqrt{\frac{1}{N^2 \cdot nmpg} \left( \sum_{f=f_1}^{f_2} |M(f)|^2 + \sum_{f=-f_2}^{-f_1} |M(f)|^2 \right)} \quad (17)$$

kde  $nmpg = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} w^2(i)$ , přičemž  $w(i)$  je posloupnost představující uvažované okno,  $M(f)$  je modul spektra signálu násobeného uvažovaným oknem a  $f_1$  a  $f_2$  jsou takové frekvence, aby se obsáhlo  $2P+1$  složek DFT kolem hlavní frekvenční složky a stejný počet kolem jejího zrcadlového obrazu,  $P$  je řád okna.

Získat analytický vztah pro výslednou nejistotu při nekoherentním vzorkování by bylo velmi obtížné, neboť jednotlivé spektrální složky včetně svých zrcadlových obrazů se navzájem ovlivňují, přičemž závislost korelace je velice komplikovaná.

#### 4. Simulace

Simulace poslouží k ověření platnosti teoretických vztahů (zejména z hlediska uvažování korelace mezi jednotlivými vstupními veličinami), popřípadě k prvotní představě závislosti nejistoty v případě, že analytický vztah není znám.

Simulace spočívá v generování testovacích signálů a jejich zpracování. Signál musí modelovat kvantování, což spočívá v přidání náhodné veličiny ke každému vzorku generovaného harmonického signálu. Tato náhodná veličina představující kvantovací šum, podléhá rovnoměrnému rozložení pravděpodobnosti a její směrodatná odchylka se rovná nejistotě způsobení kvantováním  $u_q$  (5). Pro případ nekoherentní vzorkování je třeba navíc v sérii generovaných signálů měnit frekvence rozsahu :

$$f_{sig} \in \left( \frac{m-0.5}{N} f_{vz}, \frac{m+0.5}{N} f_{vz} \right) \quad m - \text{přirozené} \quad (18)$$

kde  $m$  je zvolená poloha čáry v posloupnosti DFT.

Pro střední frekvenci signálu 200 Hz, pět period signálu ( $m = 5$ ) vychází rozpětí frekvence signálu 180 až 220 Hz.

Vyhodnocení nejistoty spočívá ve spočtení DFT signálu a určení standardní nejistoty. Zde na ni pohlížíme, jako na nejistotu typu A. To znamená, že ji vyhodnocujeme statistickými metodami. Z toho plyne požadavek na dostatečný počet realizací. V našem případě byl proces opakován 10000x.

#### 5. Experimentální ověření

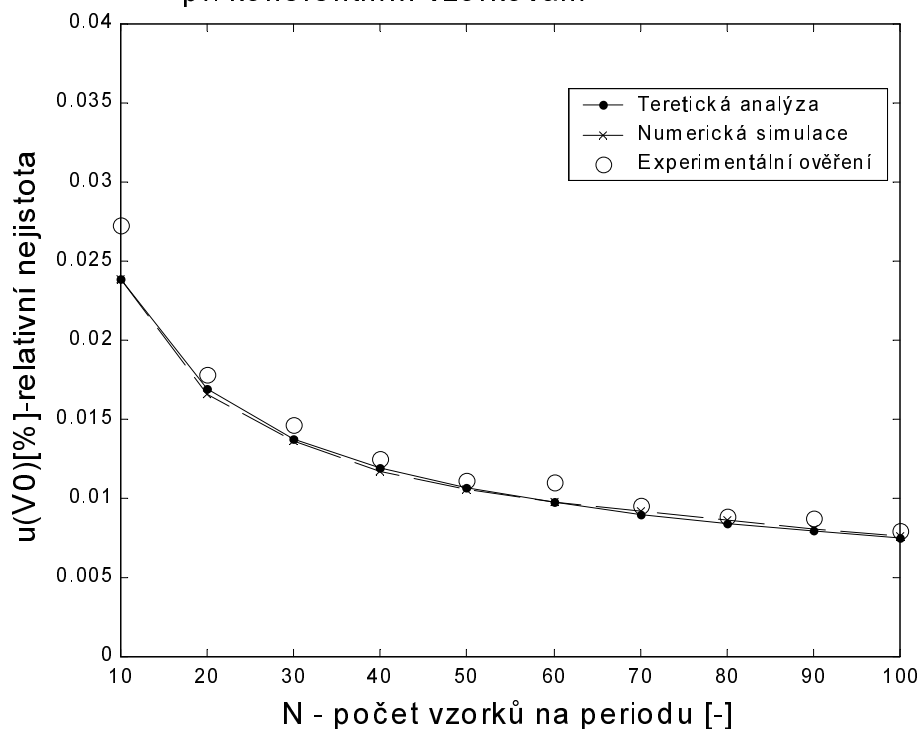
Tato fáze je zaměřená na ověření vybraného modelu zdrojů nejistot, uvažovaných v předešlých krocích. Experimentální ověření probíhá podobně jako v předchozím kroku, výpočtem zkoumaného algoritmu, tentokrát ovšem z reálného signálu s parametry shodnými jako v předchozích dvou krocích, na hardwaru, jenž byl modelován v teoretické analýze i numerické simulaci. Vyhodnocení probíhá stejným způsobem jako v případě simulací.

#### 6. Hardwarové a softwarové vybavení

Při výběru softwarového prostředí pro simulace i reálná měření padla volba automaticky na produkt firmy *MathWorks* : *MATLAB* v kombinaci se *Signal processing toolboxem* a *Data Acquisition toolboxem*.

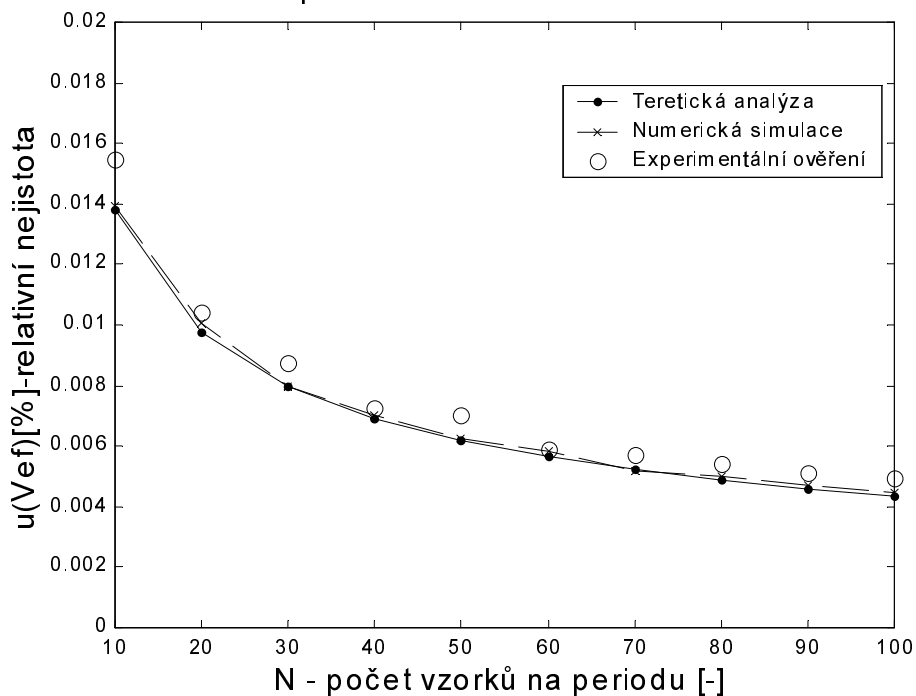
Hardwarové prostředí tvořil generátor signálu a zásuvná měřicí deska *NI 6023E* firmy *National Instruments*. Tato karta obsahuje dvanáctibitový převodník pracující na principu postupné aproximace. Požadavky na generování signálu splňuje funkční generátor *HP 33120A* firmy *Hewlett Packard*. Tento generátor umožňuje generování harmonického signálu, obdélníkového, trojúhelníkového a pilového signálu. Navíc poskytuje funkci *sweep* (frekvenční rozmítání), která byla použita pro generování signálu při nekoherentním vzorkování.

Nejistota odhadu střední hodnoty počítané ze spektra při koherentním vzorkování

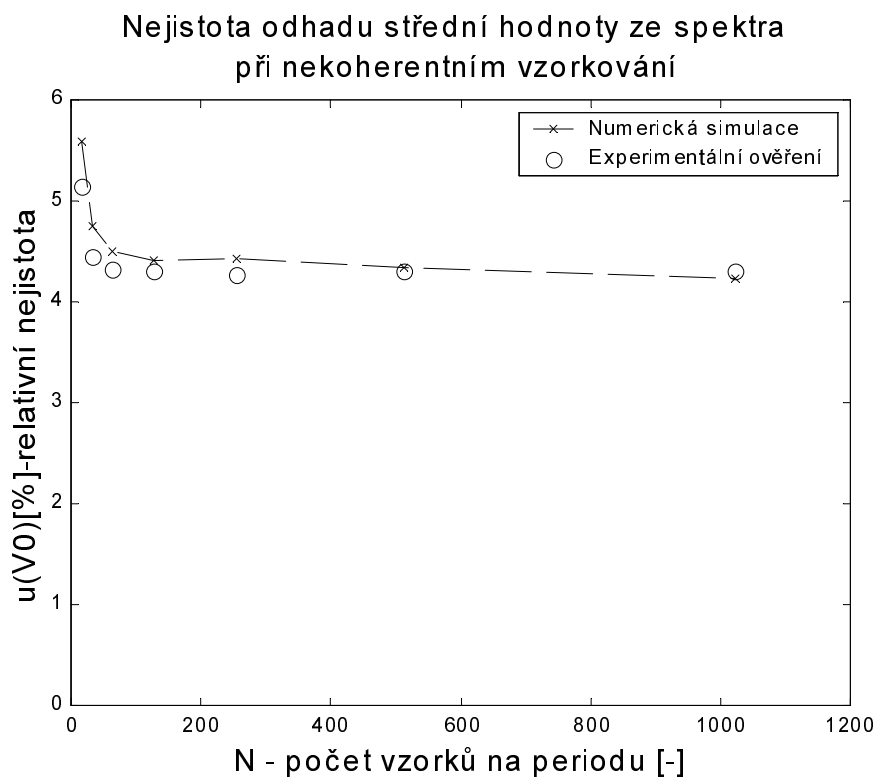


Obr. 1 – Závislost nejistoty odhadu střední hodnoty počítané ze spektra při koherentním vzorkování

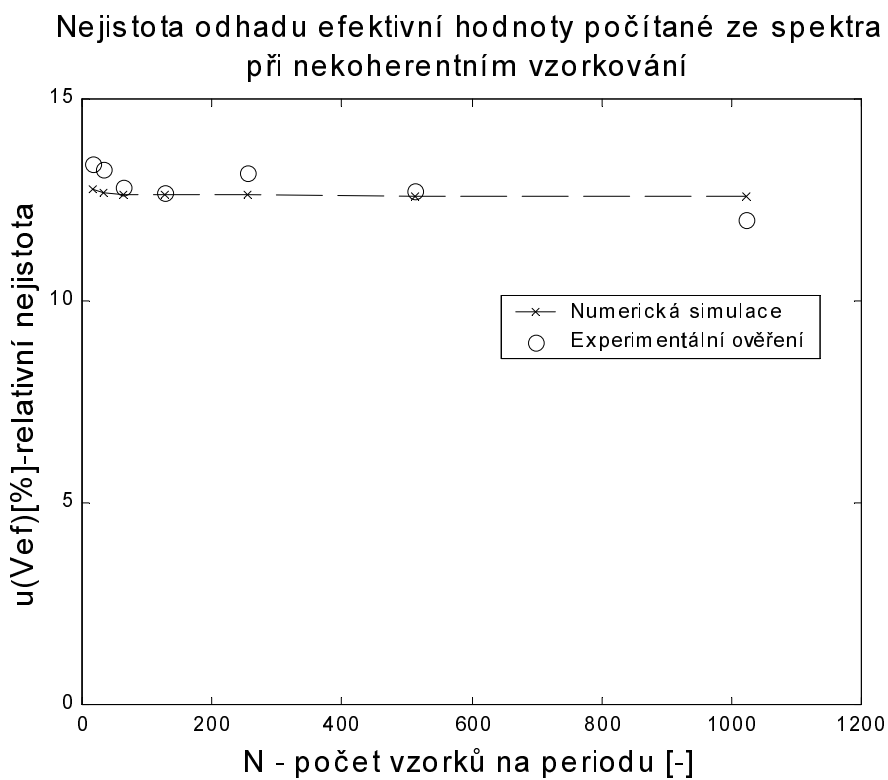
Nejistota odhadu efektivní hodnoty počítané ze spektra při koherentním vzorkování



Obr. 2 – Závislost nejistoty odhadu efektivní hodnoty počítané ze spektra při koherentním vzorkování

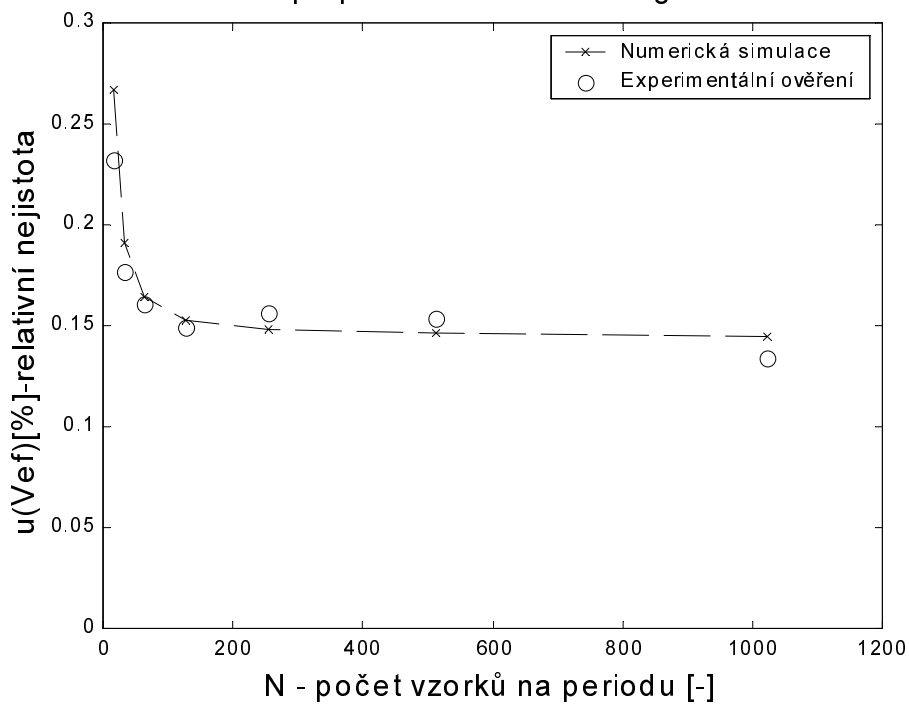


Obr. 3 – Závislost nejistoty odhadu střední hodnoty počítané ze spektra při nekoherentním vzorkování (vliv leakage)



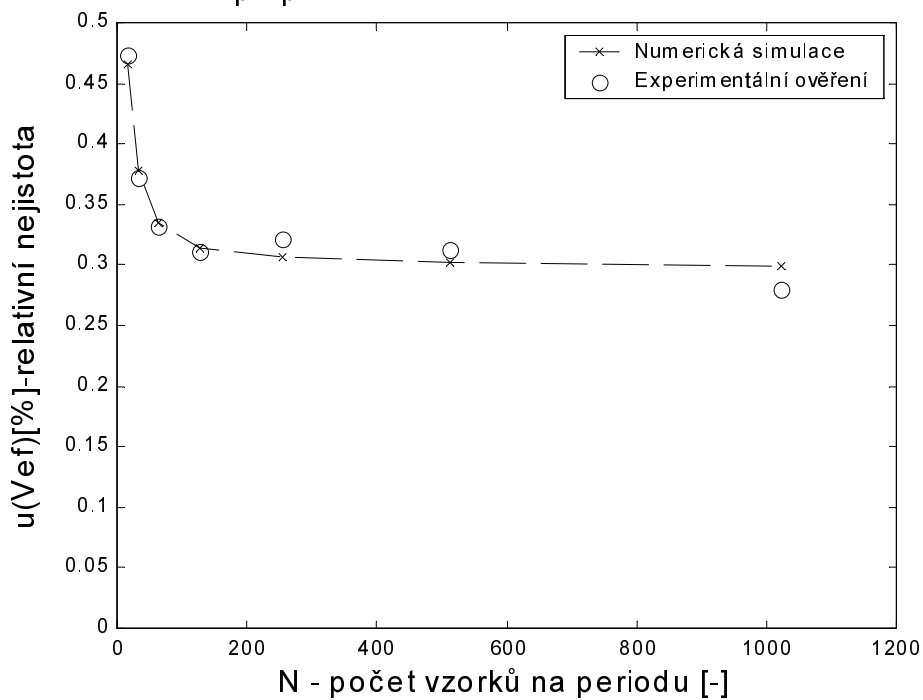
Obr. 4 – Závislost nejistoty odhadu efektivní hodnoty počítané ze spektra při nekoherentním vzorkování (obdélníkové okno)

Nejistota efektivní hodnoty ze spektra  
při použití okna Hamming



Obr. 5 – Závislost nejistoty odhadu efektivní hodnoty počítané ze spektra při nekoherentním vzorkování použitým okně Hamming

Nejistota odhadu efektivní hodnoty ze spektra  
při použití okna von Hann



Obr. 6 – Závislost nejistoty odhadu efektivní hodnoty počítané ze spektra při nekoherentním vzorkování použitým okně von Hann

## 7. Závěr

Některé z výsledků naší snahy v oblasti nejistot odhadu amplitudového DFT spektra je možné spatřit na obrázcích obr.1 – obr.6. V jednotlivých grafech jsou zobrazeny závislosti nejistoty získané teoretickou analýzou, simulací i experimentálním ověřením pro koherentní vzorkování a pro nekoherentní vzorkování simulací a experimentálním ověřením. Experimentální ověření bylo provedeno na harmonickém signálu s těmito parametry: amplituda  $V_{pp} = 4$  V, stejnosměrná složka 1 V, frekvence  $f = 50$  Hz, spouštěcí úroveň  $V_i = 1$  V. Pro nekoherentní vzorkování střední hodnota frekvence 200 Hz.

Z grafů je vidět dobrý soulad výsledků získaný uváděnými způsoby. Zajímavý poznatek plyne pro použití oken při nekoherentním vzorkování. Závislost nejistoty na počtu vzorků, klesá se vzrůstajícím počtem vzorků DFT jen do určité hodnoty, od které výše je nejistota téměř konstantní, další zvyšování nad tuto hodnotu nemá z hlediska zvýšení přesnosti smysl.

Je třeba podotknout, že v příspěvku byly zkoumány pouze hlavní zdroje nejistot. Pokud by výpočty byly prováděny s menší přesností, než odpovídá použití počítačů PC, bylo by nutno vyšetřit také vliv konečné délky slova na nejistotu výsledku. To může být případ mikroprocesorových systémů. Rovněž při vysokých vzorkovacích kmitočtech by se mohla uplatnit časová neurčitost vzorkování (jitter) a další vlivy v měřicím řetězci.

## Poděkování

Příspěvek byl zpracován v rámci výzkumného záměru číslo J04/98:210000015 na ČVUT v Praze, podporovaného Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy České republiky.

## 8. Literatura

- [1] ISO – Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement, International Organisation for Standardization, Swizerland, 1993
- [2] V. Haasz, J. Roztočil, J. Novák: Číslicové měřicí systémy. VČVUT, Praha 2000
- [3] G. Betta, C. Liguori, A. Pietrosanto: Structured Approach to Estimate the Measurement Uncertainty in Digital Signal Elaboration Algorithms, IEE Proc.-Sci. Meas. Technol. Vol. 146, No. 1, January 1999, str.21-26.
- [4] M. Sedláček: Zpracování signálů v měřicí technice. VČVUT, Praha 1993
- [5] J. Uhlíř, P. Sovka: Číslicové zpracování signálu, VČVUT, Praha 1995
- [6] O. M. Solomon, Jr.: The Use of DFT Windows in Signal-to-Noise Ratio and Harmonic distortion computations, IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, vol. 43, pp. 194-199, April 1994

## Kontaktní adresa:

Ing. Martin Novotný, Doc. Ing. Miloš Sedláček, CSc.  
České vysoké učení technické v Praze, Fakulta elektrotechnická, katedra měření,  
Technická 2, 166 27 Praha 6. Tel: (+420 2)2435 2177, fax: (+420 2) 311 9929  
E-mail: {novotnm5, sedlaceM}@feld.cvut.cz