

# VÍCEÚROVŇOVÉ BAZE A PŘEDPODMÍNĚNÍ FSAI

Ivana Pultarová

Katedra matematiky, Stavební fakulta ČVUT

*Při přibližném řešení diferenciálních rovnic je možné použít různé typy diskretizace. Příspěvek je zaměřen na využití víceúrovňové baze v Galerkinově metodě. To vede (např. oproti konečněprvkové bazi) ke zmenšení čísla podmíněnosti matice výsledné soustavy lineárních rovnic. Pro přiblížení se k optimální podmíněnosti aplikujeme na získanou soustavu upravený algoritmus FSAI. Je uvedeno několik příkladů počítaných v prostředí programu MATLAB.*

## 1. Úloha

Řešíme parciální diferenciální rovnici s homogenními stabilními okrajovými podmínkami

$$-a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f \text{ na } \Omega, \quad u = 0 \text{ na } \Gamma, \quad (1)$$

kde  $\Omega = \langle 0,1 \rangle \times \langle 0,1 \rangle$  a  $\Gamma$  je hranicí  $\Omega$ . Předpokládáme, že funkce  $a$ ,  $b$  a  $f$  jsou dostatečně hladké a že  $a$  a  $b$  splňují podmínky eliptičnosti  $a(x,y) \geq a_0 > 0$ ,  $b(x,y) \geq b_0 > 0$  pro všechna  $[x,y] \in \Omega$ . Galerkinova metoda pro získání aproximace  $u_V$  řešení úlohy (1) v  $n$ -rozměrném prostoru  $V$ , podprostoru  $H_0^1(\Omega)$ , vede k řešení soustavy lineárních rovnic s maticí tuhosti  $A$  a pravou stranou  $F$ , kde

$$A_{ij} = \int_{\Omega} a \frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{\partial u_j}{\partial x} + b \frac{\partial u_i}{\partial y} \frac{\partial u_j}{\partial y} dx dy \quad \text{a} \quad F_i = \int_{\Omega} f u_i dx dy$$

pro  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Přitom funkce  $u_i$  tvoří bazi prostoru  $V$ .

Dobu řešení ovlivňuje číslo podmíněnosti  $\kappa(A)$  matice  $A$ . Podle [1] je horní odhad počtu kroků metody sdružených gradientů potřebný ke snížení normy rezidua na  $\varepsilon$ -násobek roven

číslu  $\frac{1}{2} \sqrt{\kappa(A)} \log\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) + 1$ . Připomeňme, že  $\kappa(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$ , kde  $\|A\|_2$  je spektrální norma

matice,  $\|A\|_2 = \rho(AA^T)^{\frac{1}{2}}$ . Matice  $A$  pro úlohu (1) je pozitivně definitní, tudíž  $\kappa(A)$  je rovno podílu největšího a nejmenšího vlastního čísla matice  $A$ . Číslo podmíněnosti matice  $A$  závisí na volbě baze a na koeficientech  $a$ ,  $b$  úlohy (1), resp. na poměrech  $\sup_{z \in \Omega} a(z) / \inf_{z \in \Omega} a(z)$

a  $\sup_{z \in \Omega} b(z) / \inf_{z \in \Omega} b(z)$ .

## 2. Hierarchická baze

Zvolme za bazi  $V$  spojitě po částech lineární funkce splňující  $u_i(z_j) = \delta_{ij}$ , kde  $z_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , je množina uzlových bodů v oblasti  $\Omega$ . Při vhodném očíslování baze dostaneme několikadiagonální matici  $A$ . Je známo, že podmíněnost této matice je  $O(n^2)$ . Stejný výsledek dostaneme při volbě po částech bilineárních funkcí s obdélníkovými nosiči ([2]).

Proces převedení úlohy na úlohu s lépe podmíněnou maticí tuhosti se nazývá *předpodmínění*. Optimální předpodmínění, vedoucí k číslu podmíněnosti  $O(1)$ , dostaneme např. volbou waveletových bázeových funkcí  $\{w_i\}_{i=1}^n$  ([3], [4], [5]). Podstatnou roli přitom hraje stabilita waveletů vzhledem k normě prostoru  $H_0^1(\Omega)$ , t.j. ekvivalence  $\|c\|_{l_2} \approx \left\| \sum_{k \in Z} c_k w_k \right\|_{H_0^1(\Omega)}$  nezávisle na vektoru koeficientů  $c$ . Použití waveletové baze je však provázáno obtížemi při splnění stabilních okrajových podmínek. Pro wavelety s větší hladkostí roste velikost nosiče a tudíž i zaplnění matice  $A$ .

Za bazi prostoru  $V$  zvolme nyní hierarchickou množinu po částech lineárních ([8]) nebo bilineárních ([2], [7]) funkcí. Číslo podmíněnosti matice tuhosti v tomto případě roste jako  $O(\log n)$  ([8]). Tato baze není stabilní vzhledem k normě prostoru  $H_0^1(\Omega)$ . Pro „zlepšení“ stability lze použít některý z postupů uvedených v [3] v kapitole II. Např. přičíst ke každé bázeové funkci vhodnou kombinaci několika funkcí z úrovně pro hrubší dělení. Otázka vhodného výběru těchto několika (perturbačních) funkcí je částečně řešena pro po částech lineární funkce na triangulaci ([3]).

### 3. Metoda FSAI

Navrhujeme nový algoritmus pro zlepšení stability hierarchické baze. Oproti konstrukci navržené v [3] provádíme proces částečné ortogonalizace bázeových funkcí vzhledem ke skalárnímu součinu danému operátorem rovnice v (1). Tento postup odpovídá upravené metodě algebraického předpodmínění nazývané FSAI (factorized sparse approximate inverse) (viz. např. [6]).

Metoda FSAI hledá matici  $P$ , která minimalizuje Frobeniovu normu  $\|\tilde{P}L - I\|_F$  mezi všemi maticemi  $\tilde{P}$ , které jsou dolní trojúhelníkové a pozice jejich nenulových prvků odpovídají předem zadané struktuře. Přitom  $L$  je Choleského faktor matice  $A$ ,  $LL^T = A$ . Odpovídající algoritmus počítá matici  $P$  po řádcích nezávisle na sobě. Výpočet  $i$ -tého řádku matice  $P$  odpovídá nalezení kombinace určitých (předem daných) bázeových funkcí takových, že po přičtení této kombinace k  $i$ -té bázeové funkci bude tato nová funkce ortogonální (vzhledem k energetickému skalárnímu součinu) ke všem bázeovým funkcím použitým v této kombinaci. Výsledkem algoritmu je matice  $P$ ,  $PAP^T \approx I$ .

Použili jsme FSAI algoritmus ve dvou variantách. V první jsme předepsali strukturu nenulových pozic v  $P$  jako v  $A$ . Ve druhé jsme strukturu nenulových pozic  $S$  v  $P$  předepsali:  $S = \{(i,j); i = j \text{ nebo } u_i \text{ a } u_j \text{ se liší úrovní dělení právě o } 1\}$ . Jelikož každý řádek matice  $A$  má až  $O(\log n)$  nenulových prvků, odpovídá náročnost výpočtu matice  $P$  v první variantě nejvýše  $O(n \log^3 n)$ . V případě druhé varianty  $O(n)$ .

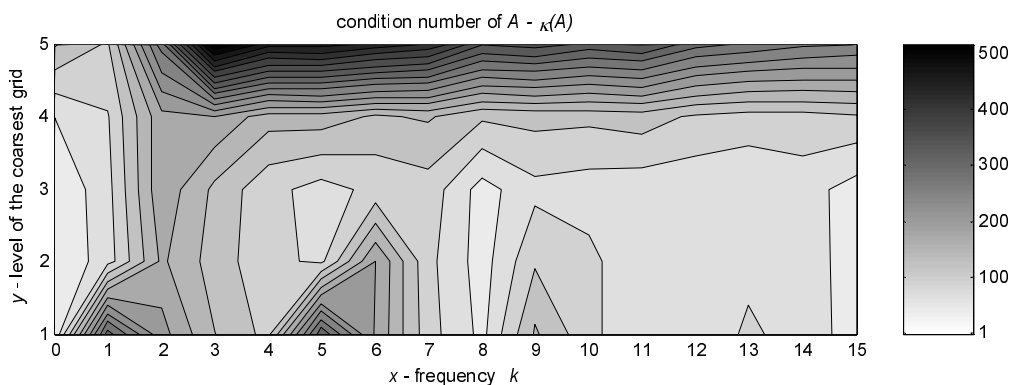
### 4. Příklad

Pro testování této metody jsme zvolili hierarchickou bazi po částech bilineárních funkcí s obdélníkovým nosičem. Řešíme úlohu (1) s variabilními koeficienty  $a, b$ . Na obr.1, 2 a 3 jsou porovnána čísla podmíněnosti (směr osy  $z$ ) pro případ koeficientů  $a(x,y) = 101 - 100 \sin(k \pi x)$ ,  $b(x,y) = 101 - 100 \sin(k \pi y)$ . Proměnná  $k = 0,1, \dots, 15$  se mění ve směru osy  $x$ . Ve směru osy  $y$  se mění úroveň nejhrubšího dělení. Tedy horní řádek v grafech znázorňuje podmíněnost pro konečněprvkové baze, zatímco dolní řádek v grafech

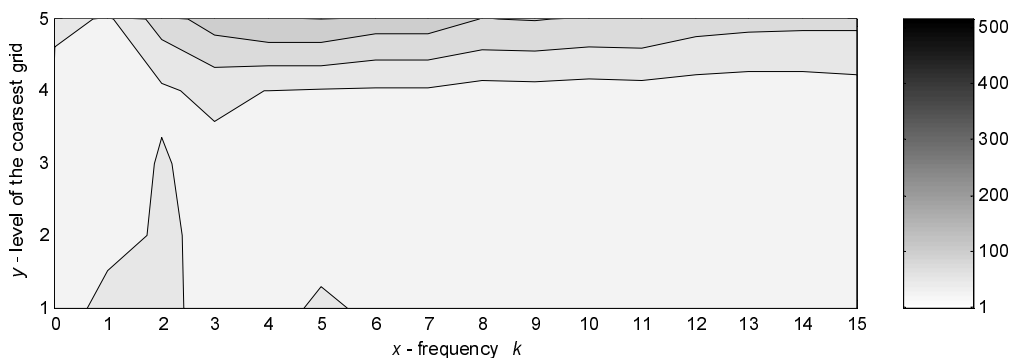
zobrazuje podmíněnost při použití víceúrovňové baze s nejvyšší možnou hierarchií. Celkový počet uzlů (bázových funkcí) se nemění a je roven číslu  $(2^5 - 1)^2 = 961$ .

Obr. 1 představuje čísla podmíněnosti při použití hierarchické baze bez další úpravy. Na obr. 2 je vývoj podmíněností pro hierarchickou bazi s dalším předpodmíněním FSAI algoritmem, kde pozice nenulových prvků v předpodmínovací matici odpovídají pozicím nenulových prvků matice  $A$  (varianta první z předchozího odstavce). Na obr. 3 jsou čísla podmíněnosti při použití hierarchické baze a aplikováním FSAI algoritmu ve zjednodušené variantě, kdy pozice nenulových mimodiagonálních prvků v matici  $P$  odpovídají pozicím nenulových prvků v  $A$ , které přísluší skalárním součinům bázových funkcí lišících se právě o 1 úroveň (druhá varianta z předchozího odstavce).

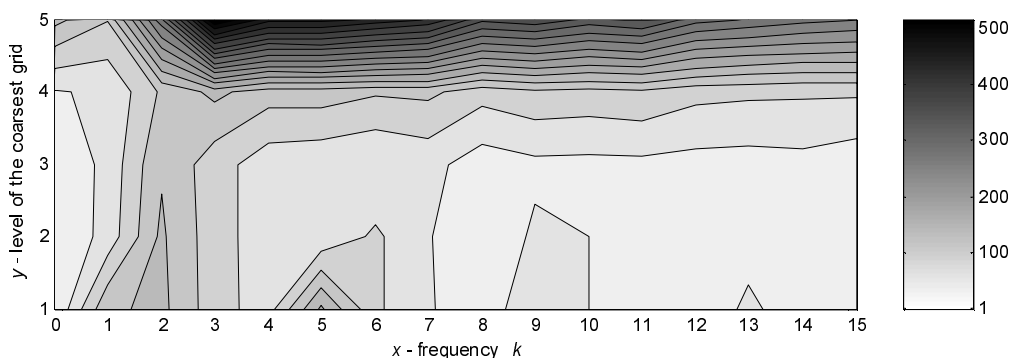
Obr.1



Obr.2



Obr.3



Proměnné koeficienty  $a$ ,  $b$  ve tvaru oscilujících funkcí jsme volili záměrně proto, že na grafech podmíněností je vidět vliv vlastností baze (růst podmíněností podél osy  $y$  směrem vzůru) ale také vliv koeficientů (střídající se velké a malé hodnoty ve směru osy  $x$ ). Podle

očekávání metoda FSAI podstatně více sníží podmíněnost pro hierarchické baze než pro konečněprvkové baze, a to pro všechny použité volby koeficientů  $a, b$ .

## 5. Závěr

V tomto příspěvku jsme předvedli nový postup předpodmínění soustav lineárních rovnic vzniklých diskretizací úlohy (1). Princip spočívá v použití hierarchické baze spolu s metodou FSAI, kterou jsme uvedli ve dvou variantách. Efektivnost uvedeného postupu vyplývá z úvah v [3], kapitole III, avšak vhodný způsob výběru perturbačních funkcí není v současné literatuře uveden. Na vhodně zvoleném příkladu jsme ukázali výsledky navrženého postupu: podstatné snížení čísla podmíněnosti při složitosti srovnatelné s předpodmíněním pomocí waveletových funkcí.

## Poznámka k výpočtu vlastních čísel

Veškeré výpočty v této práci byly prováděny v Matlabu. Při výpočtech extrémálních vlastních čísel velkých řídkých symetrických matic lze v Matlabu použít několik postupů. Jako nejvýhodnější (rozumná přesnost v rozumném čase) se nakonec ukázalo převedení matice na „full“ formu a použití funkce `svd`, a to i za cenu podstatně vyšších nároků na paměť. Tedy `svd(full(A),m)` a `svd(full(A),m,0)` pro výpočet  $m$  největších a  $m$  nejmenších vlastních čísel.

## Poděkování

Tato práce byla podporována grantem GAČR č. 201/02/0597, výzkumným záměrem CEZ MSM210000001 a interním grantem ČVUT CTU0300111.

## Literatura

- [1] O. Axelsson, V. A. Barker, *Finite Element Solution of Boundary Value Problems, Theory and Computation*, Academic Press, 1984
- [2] M. A. Christon, D. W. Roach, *The Numerical Performance of Wavelets for PDEs: The Multi-Scale Finite Element*, Computational Mechanics, 2000
- [3] A. Cohen, *Wavelet Methods in Numerical Analysis*, Handbook of Numerical Analysis, Editors P. G. Ciarlet, J. L. Lions, Elsevier Science Publishers, 2000
- [4] A. Cohen, R. Masson, *Wavelet Methods for Second-Order Elliptic Problems, Preconditioning, and Adaptivity*, SIAM J. Sci. Comput., 1999
- [5] W. Dahmen, A. Kunoth, *Multilevel Preconditioning*, Numerische Mathematik, 1992
- [6] L. Yu. Kolotilina, A. A. Nikishin, A. Yu. Jeremin, *Factorized Sparse Approximate Inverse Preconditionings. IV: Simple Approaches to Rising Efficiency*, Numerical Linear Algebra with Applications, 1999
- [7] I. Pultarová, *Multilevel Treatment of Second Order Partial Differential Equations with Variable Coefficients*, Sborník konference Mathematical and Computer Modelling in Science and Engineering, 2003
- [8] H. Yserentant, *On the Multi-Level Splitting of Finite Element Spaces*, Numerische Mathematik, 1986

e-mail. adresa: pultarova@mat.fsv.cvut.cz