

# MĚŘENÍ A MODELOVÁNÍ DYNAMICKÝCH DĚJŮ V PRUŽNÉM POTRUBÍ

Soušková H., Grobelný D., Plešivčák P.

Katedra měřicí a řídicí techniky  
VŠB-TU Ostrava, Fakulta elektrotechniky a informatiky

*Abstrakt* : Příspěvek se zabývá problematikou modelování a měření proudění kapaliny v dlouhém pružném potrubí a prezentuje dosavadní výsledky, kterých bylo dosaženo při řešení širšího úkolu směřujícího k detekci a lokalizaci místa úniku média z produktovodu. Jedná se o modelování tlakových a rychlostních poměrů proudící kapaliny uvnitř potrubí a modelování změny průřezu potrubí v závislosti na působení tlakové síly. Článek obsahuje tři části : V teoretickém úvodu se zabývá matematickým modelem proudící tekutiny uvnitř proudové trubice, který vychází ze tří základních rovnic hydromechaniky, a to z rovnice kontinuity, Bernoulliovy energetické rovnice, Newtonovy rovnice rovnováhy sil a zahrnuje vztahy pro expanzi potrubí a kapaliny. Tento matematický model byl diskretizován a numericky řešen v programovém prostředí Matlab pro různé počáteční a okrajové podmínky. Druhá část příspěvku zahrnuje popis fyzikální soustavy, na které bylo provedeno experimentální měření tlaků, průtoků a změny průřezu potrubí. Měření roztažnosti potrubí a zjišťování závislosti změny roztažnosti materiálu potrubí na působící tlakové síle přinášejí velmi zajímavé výsledky, které bylo nutno rovněž zahrnout do matematického modelu. Měření uvedených hodnot bylo provedeno pomocí RT-toolboxu. Třetí část práce je věnována diskusi výsledků a porovnání naměřených hodnot s hodnotami vypočítanými modelem.

## 1. Matematický model pružného potrubí dopravující pružnou tekutinu.

Pro vytvoření matematického modelu byly z literatury převzaty základní rovnice hydromechaniky popisující energetické a silové poměry v potrubí dopravující tekutinu. Jedná se o Bernoulliovu energetickou rovnici, Newtonovu rovnici rovnováhy sil a rovnici kontinuity. Model je tvořen soustavou tří nelineárních parciálních diferenciálních rovnic prvního řádu, které respektují změnu stavových parametrů soustavy – tlaku, rychlosti a teploty podél délky potrubí a v závislosti na čase. Při řešení se bere v úvahu rovněž závislost změny specifické hmotnosti kapaliny na jejím tlaku a teplotě i tepelná a tlaková roztažnost potrubí. Základ modelu tvoří Newtonova rovnice (1), rovnice kontinuity (2) a Bernoulliova rovnice (3).

- Newtonova rovnice:

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \rho \cdot g \cdot \sin \Theta + \rho \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + \rho \cdot v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\rho \cdot \lambda \cdot v \cdot |v|}{2d_n} = 0 \quad (1)$$

- Rovnice kontinuity:

$$\rho \cdot S \frac{\partial v}{\partial x} + \rho \cdot v \cdot \left( \frac{\partial S}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial x} \right) + S \cdot v \cdot \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \rho \cdot \left( \frac{\partial S}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \right) + S \cdot \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \right) = 0 \quad (2)$$

- Bernoulliova rovnice: (3)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \left( c \cdot T + \frac{v^2}{2} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho \cdot v \left( c \cdot T + \frac{v^2}{2} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho \cdot v) \frac{\partial}{\partial t} (\rho \cdot v \cdot g \cdot z) - \frac{\gamma \cdot (T_{ok} - T)}{S} = 0$$

Matematický model zahrnuje experimentálně zjištěné vztahy pro expanzi kapaliny (4) a

$$\text{expanzi potrubí (5). } \rho = \frac{\rho_0}{\exp\left(\frac{1}{K}(p_0 - p)\right) \cdot \exp(\beta \cdot (T - T_0))} \quad (4)$$

$$V = V_0 \cdot \exp\left(\frac{d_n}{E \cdot d}(p - p_0)\right) \cdot \exp(2 \cdot \alpha \cdot (T - T_0)) \quad (5)$$

Diferenciální rovnice (1)-(3) byly diskretizovány a pro zvolené počáteční a okrajové podmínky řešeny na počítači. Program, který je implementován v prostředí Matlab 6.1, umožňuje realizovat změny stavu systému bez ohledu na způsob popisu chování systému. Stav systému modelujeme vhodně zvolenými stavovými proměnnými – parametry modelu. Vhodnou volbou simulačního času můžeme zachytit dynamické děje v systému. Potrubí je rozděleno řezy na stejné úseky. Řezy představují uzly po ose délky. Parciální diferenciální rovnice jsou pak řešeny metodou řezů v uzlech po ose délky a integrací metodou Runge-Kutta po ose času.

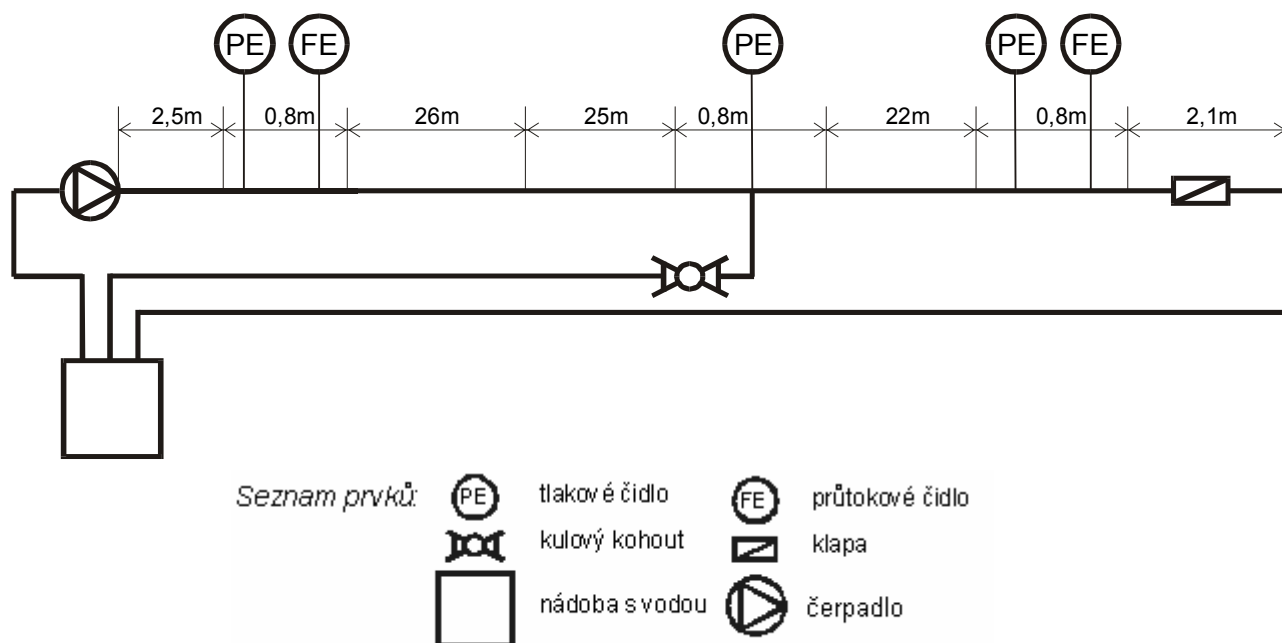
Seznam symbolů:

c	[J kg <sup>-1</sup> ]	..... vnitřní energie tekutiny
d	[m]	..... tloušťka stěny potrubí
d <sub>n</sub>	[m]	..... vnitřní průměr potrubí
E	[Pa]	..... modul pružnosti materiálu trubky
S	[m <sup>2</sup> ]	..... průřez potrubí
g	[m s <sup>-2</sup> ]	..... gravitační zrychlení
K	[Pa]	..... modul objemové pružnosti kapaliny
l	[m]	..... délka potrubí
p	[Pa]	..... tlak kapaliny
t	[s]	..... čas
T <sub>ok</sub>	[K]	..... okolní teplota
T	[K]	..... teplota
v	[m s <sup>-1</sup> ]	..... průtoková rychlost
x	[m]	..... souřadnice po potrubní ose
z	[m]	..... nadmořská výška
α	[K <sup>-1</sup> ]	..... součinitel objemové roztažnosti potrubí
β	[K <sup>-1</sup> ]	..... součinitel objemové roztažnosti kapaliny
γ	[W m <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> ]	..... koeficient přestupu tepla
λ	[-]	..... koeficient tření
ρ	[kg m <sup>-3</sup> ]	..... hustota kapaliny
τ	[kg.m <sup>-1</sup> s <sup>-2</sup> ]	..... tečné napětí u stěny potrubí
Θ	[°]	..... úhel tangenciální složky gravitační síly

## 2. Experimentální část práce.

### 2.1. Fyzikální model soustavy transportující kapalinu.

Za účelem experimentálního ověření matematického modelu a porovnání výsledků poskytovaných počítačovým modelem byl vytvořen fyzikální model pružného potrubí transportující kapalinu - v našem případě vodu. Aparatura se skládá z nádoby s vodou, potrubí, čerpadla, které bylo použito jako zdroj konstantního tlaku, tlakových a průtokových čidel, klapy a kulového odpouštěcího ventilu. Měřicím úsekem je úsek od čerpadla po klapu. Blokové schéma soustavy s měřicími a regulačními prvky je znázorněno na následujícím obrázku 1.



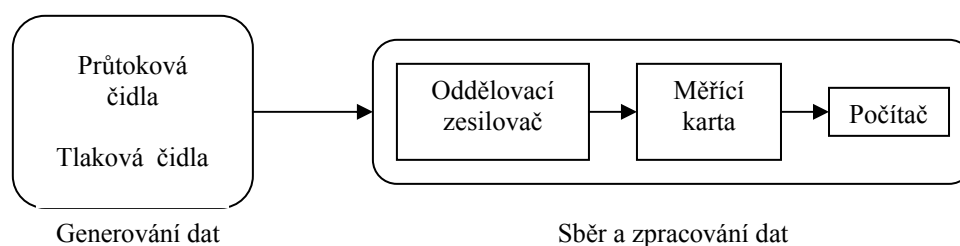
Obr. 1: Schéma zapojení soustavy

Měřicí místo 1 je umístěno na začátku potrubí a obsahuje tlakové čidlo 1 a průtokové čidlo 1. Měřicí místo 2 je umístěno na konci potrubí a obsahuje tlakové čidlo 2 a průtokové čidlo 2.

Předpokládá se, že hodnoty tlakového čidla umístěného uprostřed potrubí budou sloužit jako kontrolní hodnoty při práci s počítačovým modelem.

## 2.2. Měřicí informační řetězec.

Zapojení aparatury podle obr. 1. umožňuje měřit současně hodnoty ze tří tlakových čidel a dvou průtokových čidel. Blokové schéma měřícího řetězce je uvedeno na následujícím obrázku 2 :



Obr. 2: Blokové schéma měřícího řetězce.

Byla použita měřicí karta AD512 a data byla snímána do počítače v prostředí RT-toolboxu.

## 2.3. Měření potřebná ke zjištění parametrů soustavy.

Na fyzikální soustavě byla provedena řada měření. Velké úsilí bylo věnováno kalibraci průtokových a tlakových čidel, měření modulu pružnosti materiálu potrubí a měření koeficientu tření materiálu potrubí. Ukázalo se, že matematický model je velmi citlivý na změnu velikosti těchto parametrů.

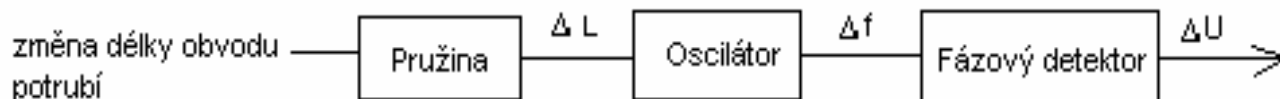
### 2.3.1. Měření modulu pružnosti

Pro simulaci matematického modelu pružného potrubí transportující kapalinu bylo nutné stanovit modul pružnosti  $E$  materiálu plastové trubky. Pro výpočet modulu pružnosti byla použita rovnice  $V = V_0 \cdot \exp\left(\frac{d_n}{E \cdot d} (p - p_0)\right) \cdot \exp(2 \cdot \alpha \cdot (T - T_0))$ . Eliminací vlivu teploty a vyjádřením modulu pružnosti z této rovnice dostáváme tvar pro výpočet  $E$  :

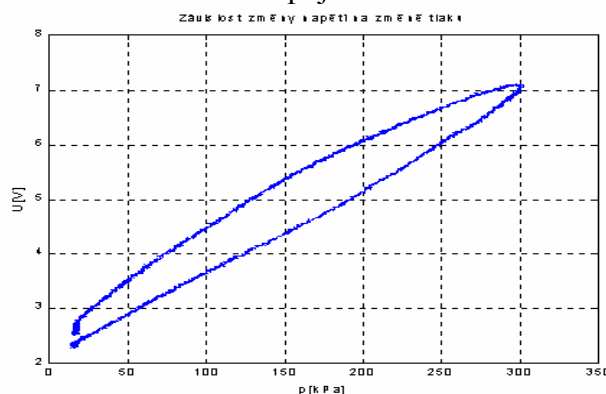
$$E = \frac{d_n (p - p_0)}{d \cdot \ln \frac{S}{S_0}} = \frac{d_n (p - p_0)}{d \cdot \ln \frac{V_0 + \Delta V}{V_0}} \quad (6)$$

kde :  $V_0$  je počáteční objem vody v potrubí při počátečním tlaku  $p_0$   
 $V = V_0 + \Delta V$  je výsledný objem při maximálním tlaku  $p$ .

Výsledná hodnota modulu pružnosti  $E$  však vykazovala při opakovaných měřeních velkou nepřesnost. Proto byla vyslovena hypotéza, že roztažnost stěny potrubí na působící tlakové síle vykazuje nelineární závislost. Tuto hypotézu potvrzuje měření roztažnosti stěny potrubí speciálně zkonstruovaným indukčním snímačem, který převádí změnu obvodu potrubí na změnu napětí. ( Viz Obr. 3).



Obr. 3 : Blokové schéma zapojení měřícího řetězce.



Obr. 4 : Závislost roztažnosti stěny potrubí na tlaku.

Matematický model je na velikost hodnoty modulu pružnosti velmi citlivý, a proto je nutné nelineární průběh  $E=E(p)$  do modelu zapracovat. Hysterezní průběh však do značné míry komplikuje matematický model, a proto zatím v něm není tato nelinearita plně zahrnuta. Současný stav modelu pracuje s lineární aproximací této nelinearity.

### 2.3.2 Měření ustálených stavů v potrubí a výpočet koeficientu tření.

V měřicích místech 1 a 2 podle Obr. 1 byly snímány hodnoty tlaku a průtoku. Postupně byl v potrubí zvyšován tlak, což způsobilo i změny hodnot průtoku. Naměřené hodnoty tlaku a průtoku jsou uvedeny v následující tabulce. Byly vypočteny hodnoty rychlostí v příslušných měřicích místech a vypočtena hodnota koeficientu tření.

Koeficient tření  $\lambda$  je přímo úměrný ztrátové výšce  $h_z$ . Ztrátová výška  $h_z$  je přímo úměrná rozdílu tlaků mezi dvěma body. Byly změřeny tlaky  $p_1$  a  $p_2$  na začátku a na konci

potrubí, vzdálenost mezi měřicími místy  $l = 74,6$  m . Další hodnoty potřebné pro výpočet jsou vnitřní průměr potrubí  $d_n = 0,032$  m a hustota kapaliny  $\rho = 1000$  kg/m<sup>3</sup>.

$$\lambda = \frac{2 \cdot d_n \cdot \Delta p}{\rho \cdot l \cdot v^2} \quad (7)$$

Ustálené stavy-změřené hodnoty průtoků a rychlostí v měřicím místě 1 a 2.						
Tlak1 [kPa]	v1 [m/s]	Q1 [l/s]	Tlak2 [kPa]	v2 [m/s]	Q2 [l/s]	Lambda[-]
201,943	1,650	1,327	119,952	1,703	1,369	0,0250
201,479	1,653	1,330	119,257	1,708	1,374	0,0250
202,446	1,646	1,324	120,960	1,700	1,367	0,0250
206,145	1,618	1,301	126,630	1,675	1,347	0,0252
223,406	1,498	1,204	154,542	1,575	1,267	0,0250
309,239	0,934	0,751	281,635	1,013	0,814	0,0250

Tab. 1 : Změřené hodnoty tlaků a průtoků, vypočítané rychlosti a koeficient tření.

Koeficient tření  $\lambda$  vyšel :  $\lambda = 0,025$  [-] pro všechna měření stejně.

### 3. Porovnání naměřených dat s výsledky počítačového modelu.

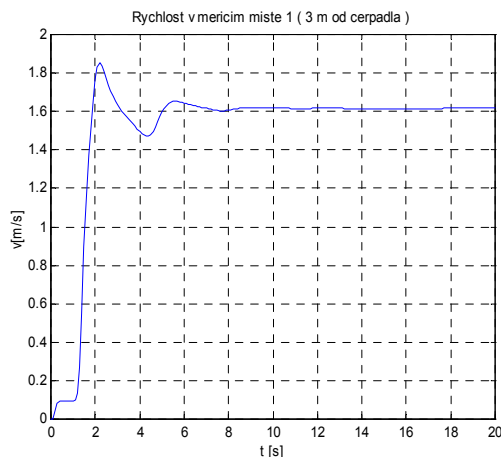
Tlak v potrubí byl v matematickém modelu postupně nastavován na vyšší hodnotu – odpovídající hodnotám tlaku měřených na fyzikální soustavě. Pevné okrajové podmínky pro počáteční a koncovou hodnotu tlaku simulují nárůst tlaku v potrubí způsobený postupným uzavíráním klapky na konci potrubí. Potrubí bylo rozděleno řezy na stejné úseky o délce 0,8 m. Ve všech těchto řezech jsou již hodnoty teploty, tlaku, rychlosti, průtoků a průřezu potrubí dopočítávány modelem. Tabulka 2 zobrazuje data vypočítaná modelem, která odpovídají měřicím místům 1 a 2 na laboratorní soustavě podle Obr.1.

Tlak1 [kPa]	v1 [m/s]	Tlak2 [kPa]	v2 [m/s]	S1 [m <sup>2</sup> ]	S2 [m <sup>2</sup> ]
201,49	1,643	119,46	1,707	0,8414	0,8335
202,49	1,638	120,47	1,701	0,8416	0,8337
206,53	1,626	126,60	1,688	0,8428	0,8349
223,30	1,541	154,72	1,595	0,8484	0,8404
309,71	1,047	281,25	1,074	0,8689	0,8656

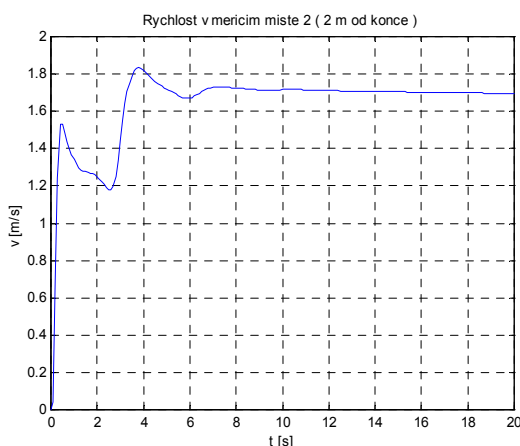
Tab. 2 : Hodnoty vypočítané modelem.

V posledních dvou sloupcích jsou uvedeny hodnoty průřezu trubky v měřicím místě 1 a 2 – je zřetelně vidět, jak se průřez trubky zvětšuje s rostoucím tlakem.

Dále jsou uvedeny některé grafy poskytované modelem. Jedná se o výpočet aktuálních hodnot rychlostí v měřicích místech 1 a 2 pro zadané nulové počáteční podmínky. Doba simulace byla zvolena 20s, neboť tento čas byl dostatečný k získání ustáleného řešení.

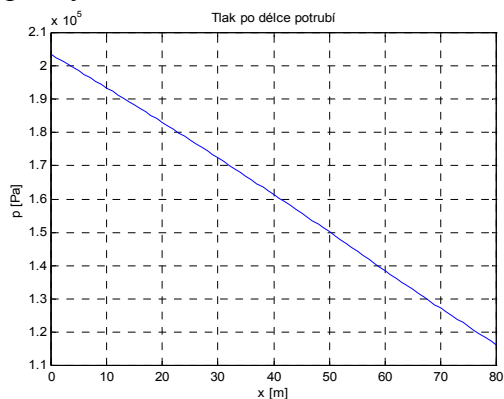


Obr. 5 : Rychlost  $v_1$  v měř. místě 1 při tlaku 201,49 kPa.

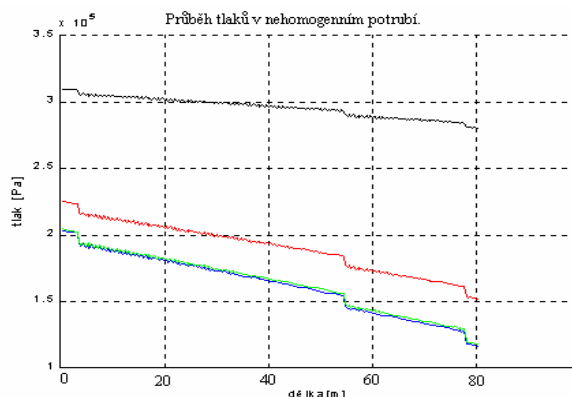


Obr. 6 : Rychlost  $v_2$  v měř. místě 2 při tlaku 119,47 kPa.

Obr. 7 znázorňuje průběh tlaku v jednotlivých řezech po délce potrubí. Vidíme pokles tlaku po délce potrubí, který vzniká při překonávání hydraulického odporu při proudění skutečné kapaliny.



Obr. 7 : Pokles tlaku po délce potrubí způsobený ztrátami tření.



Obr. 8 : Průběh tlaku po délce v nehomogenním potrubí.

V potrubí se vyskytují tři krátké úseky z jiného materiálu nesoucí čidla tlaku, průtoku a ovládací ventil. Pokud tuto skutečnost zahrneme do modelu vidíme na Obr. 8 místa na začátku, uprostřed a na konci grafu, kde dochází ke strmému poklesu tlaku. Strmý pokles tlaku je způsoben skokovou změnou parametrů materiálů v této části potrubí. Zahrnutí nehomogenity materiálů potrubí do modelu sebou avšak přináší značně zvýšené nároky na dobu trvání výpočtu.

Mezi hodnotami rychlostí naměřenými na fyzikálním modelu a hodnotami rychlostí poskytovaných počítačovým modelem dochází k odchylkám, které jsou patrné v následující tabulce. Zvětšující se chyba pro narůstající hodnoty tlaku je zřejmě způsobena zanedbáním nelinearity, kterou vykazuje roztažnost stěny potrubí. Model pracuje zatím pouze s lineární aproximací této nelinearity a je velmi citlivý na změny hodnoty modulu pružnosti materiálu trubky. Proto je pro výsledky modelování důležité přesné stanovení parametrů soustavy. Předpokládáme, že po zahrnutí nelinearity roztažnosti stěny potrubí do matematického modelu bude tato chyba minimalizována.

Porovnání hodnot změřených a vypočtených modelem				
	Hodnoty změřené	Hodnoty z modelu		
Tlak	Rychlost-měřicí místo 1	Rychlost-měřicí místo 1	Chyba	Chyba
[kPa]	v1 [m/s]	v1 [m/s]	[m/s]	[ % ]
201,49	1,653	1,633	0,020	1,21
202,49	1,646	1,614	0,032	1,94
206,3	1,618	1,608	0,010	0,62
223,3	1,498	1,526	-0,028	-1,87
309,7	0,934	1,014	-0,080	-8,57
	v2 [m/s] – měřicí místo 2	v2 [m/s]- měřicí místo 2		
201,49	1,708	1,726	-0,018	-1,05
202,49	1,700	1,721	-0,021	-1,24
206,3	1,675	1,708	-0,033	-1,97
223,3	1,575	1,610	-0,035	-2,22
309,7	1,013	1,036	-0,023	-2,27

Tab. 3 : Porovnání hodnot rychlostí změřených a hodnot vypočítaných modelem.

#### 4. Závěr

Článek představuje úvod do řešení problematiky detekce a lokalizace místa úniku média z produktovou. Během provozu produktovou může dojít k jeho narušení a následně k úniku. Únik představuje ekonomickou ztrátu a zároveň může dojít ke kontaminaci okolního prostředí přepravovanou látkou.

V dosavadním průběhu řešení byly navrženy a sestaveny dva modely pružného potrubí dopravující pružnou tekutinu.

1. Matematický model
2. Fyzikální model

Dosud bylo dosaženo těchto výsledků : V oblasti matematického modelu byl odladěn program simulující ustálené proudění pružné kapaliny v pružném potrubí. Nastavením proměnných parametrů byl počítačový model přizpůsoben konkrétnímu fyzikálnímu modelu vytvořenému v laboratoři. Do modelu byly zapracovány některé parametry určené experimentálním měřením. Jedná se o parametry potrubí, o modul pružnosti a koeficient tření. Ukázalo se, že matematický model je velmi citlivý na velikosti těchto parametrů. Dále do modelu byla zapracována nehomogenita materiálu potrubí. V podstatě lze říci, že, že v oblasti modelování byl připraven nástroj pro výpočty dalších dějů souvisejících s lokalizací a detekcí místa úniku.

Na fyzikálním modelu bylo provedeno několik sad měření. Na uzavřeném okruhu potrubí byly simulovány ustálené průtoky pro různé hodnoty tlakových poměrů uvnitř potrubí. Ve dvou měřicích místech byly měřeny a vyhodnoceny tlaky, průtoky a rychlosti proudící tekutiny. Tato měření byla porovnána s hodnotami, které poskytuje počítačový model. V oblasti fyzikálního modelu je vše připraveno k měření dat na reálné soustavě, tak aby výsledky matematického modelu mohly být konfrontovány s reálnou skutečností.

Tento projekt je podporován grantem FRVŠ č.1745/2003 : „ Měření a modelování hydraulických rázů v pružném potrubí “.

#### 5. Literatura

- [1] Maštovský, O. : Hydromechanika, SNTL Praha 1964
- [2] Noskovič, J. : Hydromechanika, skriptum VŠB-TU Ostrava, 1986
- [3] Kozubková, M., Drábková, S., Štáva, P. : Matematické modely nestlačitelného a stlačitelného proudění, skriptum VŠB-TU Ostrava 1999
- [4] Záruba, J. : Hydraulický ráz v soustavách potrubí, studie ČSAV, Praha 1984
- [5] Bemčáková, B. : Diplomová práce, VŠB-TU Ostrava 1999
- [6] Filipová, B. : Disertační práce, VŠB-TU Ostrava, 2003
- [7] Ožana, Š. : Teze k disertační práci, VŠB-TU Ostrava, 2003
- [8] Firemní materiály společnosti LIC-Consult
- [9] Hušek, R., Lauber, J. : Simulační modely, SNTL, Praha, 1987
- [10] Neuschl, Š. a kol. : Modelovanie a simulácia, ALFA, Bratislava, 1988
- [11] Firemní materiály společnosti Omega Engineering

Kontaktní údaje :

Adresa : VŠB – TUO, FEI, Katedra měřicí a řídicí techniky

17. listopadu 15, 708 33 Ostrava-Poruba, CZ

[www.vsb.cz](http://www.vsb.cz), [http:// kat455.vsb.cz](http://kat455.vsb.cz)

e-mail : [hana.souskova@vsb.cz](mailto:hana.souskova@vsb.cz)