

# ZPRACOVÁNÍ BIOMEDICÍNSKÝCH SIGNÁLŮ A OBRAZŮ POMOCÍ WAVELET TRANSFORMACE

*E. Hošťálková, A. Procházka*

Vysoká škola chemicko-technologická v Praze  
Ústav počítačové a řídicí techniky

## Abstrakt

Wavelet (někdy též vlnková) transformace představuje v současné době základní matematický prostředek pro analýzu a zpracování nestacionárních signálů a obrazů. Příspěvek je věnován úvodu do problematiky wavelet analýzy a jejímu využití pro zpracování signálů a obrazů se zaměřením na potlačování jejich rušivých složek. V návaznosti na dekompozici signálů je pozornost věnována problematice globálního prahování wavelet koeficientů a jejich dalšímu použití k rekonstrukci pozorovaných dat. Tento postup je aplikován na vybrané biomedicínské signály zahrnující EKG signály a obrazy magnetické rezonance.

**Klíčová slova:** wavelet (vlnková) transformace, analýza signálů a obrazů, dekompozice a rekonstrukce dat, potlačení šumu, prahování, zpracování biomedicínských signálů

## 1 Úvod k wavelet transformaci

Wavelet transformace (WT) představuje alternativu ke krátkodobé Fourierově transformaci a poskytuje široké možnosti analýzy a zpracování vícerozměrných dat. V principu využívá tato transformace analyzující funkci konečné délky ve tvaru "vlnky" daných vlastností [9, 3, 11, 7, 5]. Tvar této funkce lze přitom volit podle charakteru analyzovaného signálu či obrazu a žádané aplikace.

Na obr. 1(a) je uveden příklad dilatovaných funkcí odvozených z výchozí Shannonovy funkce (*mother wavelet*) definované vztahem

$$w(t) = \frac{\sin(\pi t/2)}{\pi t/2} \cos(3 \pi t/2) \quad (1)$$

tvůřící základ pro další funkce odvozené pro zvolené parametry dilatace  $a = 2^m$  a translace  $b = k 2^m$  podle vztahu

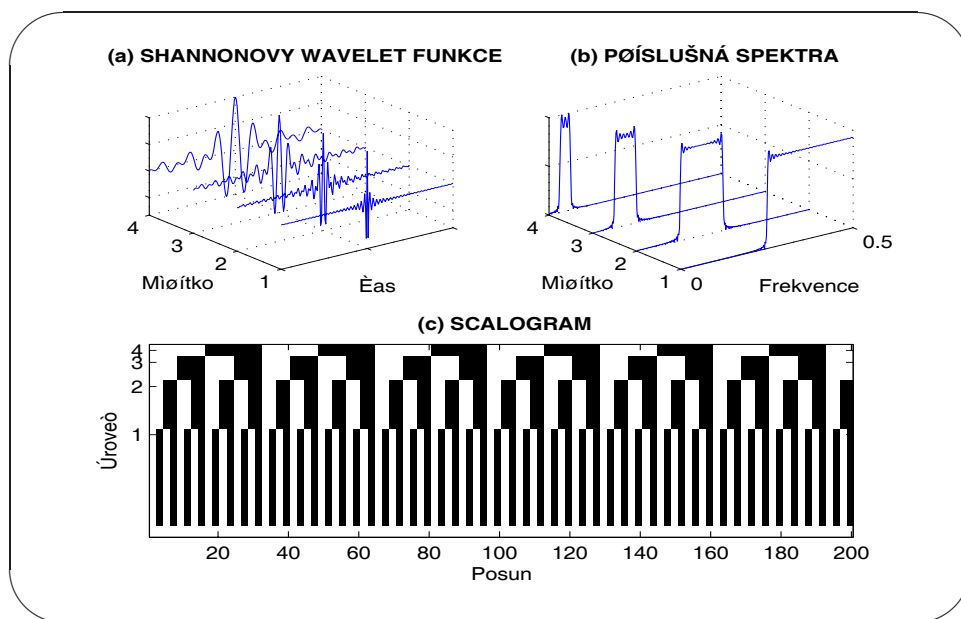
$$W_{m,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} w\left(\frac{t-b}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{2^m}} w(2^{-m} t - k) \quad (2)$$

kde  $m$  a  $k$  jsou celočíselné konstanty. Další wavelet funkce jsou definovány buď analyticky nebo řešením příslušné dilatační rovnice [2, 9]. Ve všech případech je dilatace funkce spojena s kompresí spektra podle obr. 1(b).

Výsledné koeficienty uvedené diskrétní wavelet transformace (DWT) lze následně zobrazit ve vlnkové mapě (*scalogramu*) na obr. 1(c), ve které koeficienty představují míru korelace daného signálu a vybrané wavelet funkce [6]. Vodorovná osa přitom odpovídá posunu wavelet funkce a osa svislá představuje úroveň rozkladu do zvolené úrovně  $m$  s měřítkem  $2^m$ . Koeficienty spojené s analýzou pomocí základní krátké vlnky umožňují přitom podrobné časové rozlišení, ale hrubé rozlišení frekvenční. Dilatace základní vlnky zhoršuje rozlišení časové, ale zlepšuje rozlišení frekvenční. Tato možnost proměnného rozlišení v časové a frekvenční oblasti je charakteristická pro užití wavelet funkcí a umožňuje analýzu signálů a obrazů jak z globálního tak i lokálního pohledu. Proměnné rozlišení je významným rysem wavelet transformace v porovnání s krátkodobou Fourierovou transformací s konstantním rozlišením daným délkou výběrového okénka.

Vzhledem k pásmově omezenému spektru wavelet funkce lze proces konvoluce s touto funkcí interpretovat jako filtraci pásmově omezenou propustí [12]. Z hlediska číslicového zpracování

signálů představuje wavelet transformace úplnou banku filtrů s rozkladem signálu do dílčích frekvenčních pásem s tím, že základní nejpomalejší frekvenční složky jsou detekovány měřítkovou funkcí (*scaling function*). Wavelet funkce jsou tak popsány pásmovými filtry (*band-pass filters*) a funkce měřítková představuje komplementární dolnofrekvenční propust (*low-pass filter*). Příslušné koeficienty se určují z konvoluce signálu a příslušné analyzující funkce [3, 11]. Měřítko je přitom nepřímo úměrné frekvenci, přičemž nízké frekvence odpovídají velkým měřítkům a dilatované wavelet funkci. Wavelet analýzou při velkých měřítcích získáváme ze signálu globální informace (*aproximační složku*) a při malých měřítcích podrobné informace (*detailní složku*) představující rychlé změny v signálu. Signály jsou v praktických aplikacích často pásmově omezené s konečnou energií a pro příslušnou analýzu postačí tedy omezená škála měřítek.



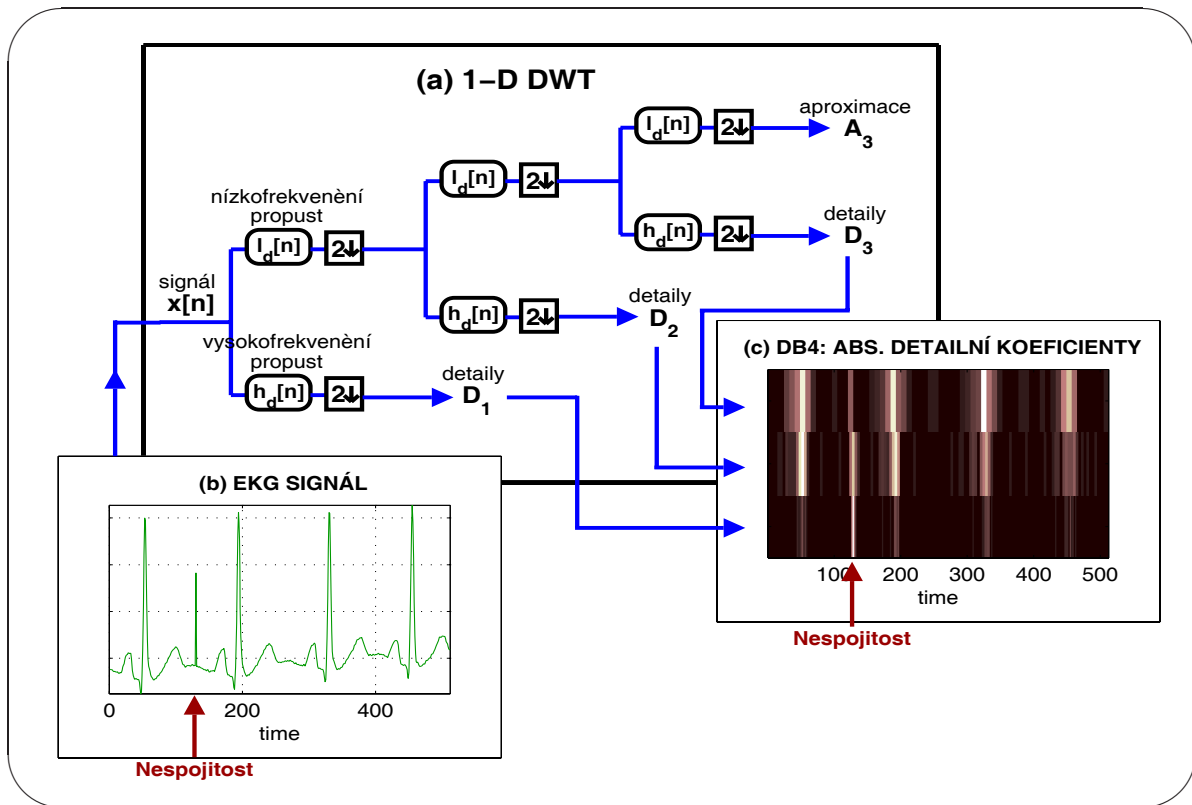
Obrázek 1: Princip wavelet transformace prezentující (a) soubor dilatovaných (Shannonových) funkcí, (b) odpovídající spektra, a (c) koeficienty ve formě scalogramu s rozdílným časovým a frekvenčním rozlišením na jednotlivých úrovních dekompozice

Výpočet koeficientů diskrétní wavelet transformace se realizuje postupnou aplikací vysokofrekvenční propusti (představující wavelet funkci) a nízkofrekvenční propusti (představující měřítkovou funkci) na daný signál s využitím *Mallatova dekompozičního schématu* [7] podle obr. 2. Pro každou úroveň dekompozice  $p$  je výstupem vysokofrekvenční propusti  $h_d(k)$  detailní složka  $D_p$  signálu a výstupem komplementární nízkofrekvenční propusti  $l_d(k)$  složka aproximační  $A_p$  s využitím konvoluce a následným podvzorkováním podle vztahu

$$D_p(n) = \sum_{k=0}^{L-1} h_d(k) x(2n - k) \quad (3)$$

$$A_p(n) = \sum_{k=0}^{L-1} l_d(k) x(2n - k) \quad (4)$$

pro  $n = 0, 1, \dots, N/2$  kde  $\{x(n)\}_{n=0}^{N-1} = [x(0), x(1), \dots, x(N-1)]'$  je analyzovaný signál a posloupnosti  $\{h_d(k)\}_{k=0}^{L-1}$  a  $\{l_d(k)\}_{k=0}^{L-1}$  definují dekompoziční filtry. Soubor wavelet funkcí tvoří ortogonální bázi [3] a umožňuje jednoduchou rekonstrukci signálu [11] založenou na vložení nulových hodnot mezi každé dva vzorky a následné konvoluci s rekonstrukčními filtry  $l_r(k)$  a  $h_r(k)$  odvozených z filtrů dekompozičních inverzí pořadí jejich koeficientů. Soubor filtrů přitom umožňuje perfektní rekonstrukci původního signálu z odpovídajících DWT koeficientů pokud má signál konečnou energii a wavelet funkce splňují podmínku přípustnosti (*admissibility condition*) [3, 6, 12].



Obrázek 2: Detekce nespojitosti v EKG signálu prezentující (a) Mallatovo schéma, (b) EKG signál s aditivním impulsem a (c) scalogram koeficientů pro *db4* wavelet funkce

S ohledem na široké možnosti volby typu wavelet funkcí, proměnné rozlišení v časové a frekvenční oblasti a rozsáhlé možnosti dekompozice a rekonstrukce původního signálu či obrazu poskytuje wavelet analýza široké aplikační možnosti [14] ve zpracování inženýrských signálů, zpracování signálů i obrazů v biomedicíně [1, 13, 8] i signálů dalších. Hlavní využití spočívá ve všech případech v analýze signálů a obrazů, v jejich kompresi a odstranění rušivých složek [4].

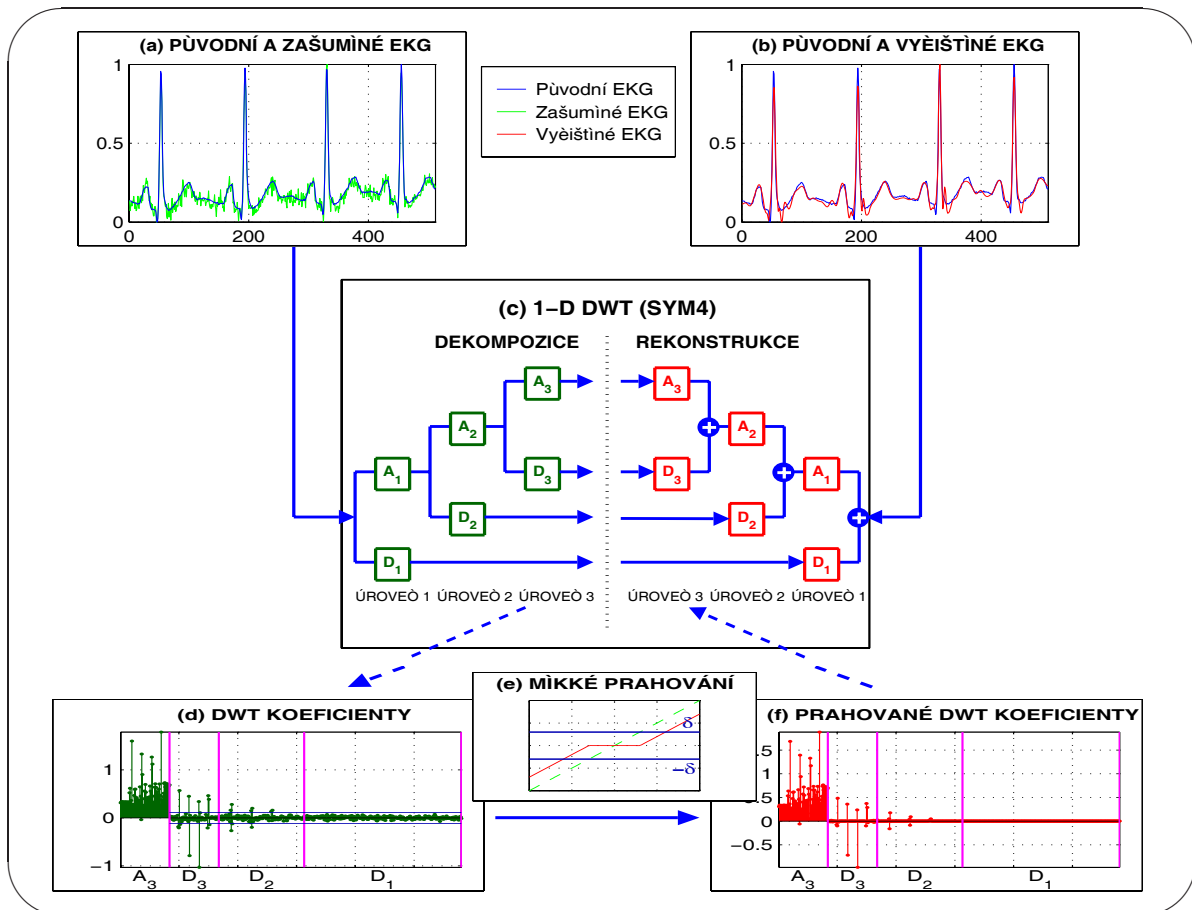
Pro zvláštní aplikace se namísto diskretní wavelet transformace používá transformace spojitá (*Continuous wavelet transform - CWT*), která obsahuje redundantní informace, vyžaduje více operační paměti, její zobrazení je však často názornější. Na rozdíl od DWT jsou v případě spojitě WT [12] užity spojitě proměnné hodnoty dilatace  $a$  a posunutí  $b$ .

Následující studie je věnována aplikaci wavelet transformace pro zpracování biomedicínských signálů a obrazů s využitím tří vybraných reálných wavelet funkcí s ortogonálními bázemi (*Daubeschies* wavelet *db4*, *symlet* wavelet *sym4* a *coiflet* wavelet *coif4*). Tyto funkce jsou definovány dilatačními rovnicemi [9]. Vlastnosti těchto funkcí jsou popsány i ve výpočetním systému MATLAB [6] s využitím příkazu *waveinfo*.

## 2 Analýza a zpracování signálů

Ve zpracování signálů se wavelet analýza využívá v řadě oblastí [6], které zahrnují detekci trendů, zlomů, nespojitostí ve vyšších derivacích, a dále kompresi a potlačování rušivých složek signálů.

Obr. 2 uvádí příklad detekce aditivního rušivého impulsu v části EKG (*Elektrokardiogram*) signálu pomocí *db4* wavelet funkce. Dekompozice je přitom uvedena do třetí úrovně, což postačuje pro vizualizaci uvedené složky ve *scalogramu*. Barevný odstín (celkem 64 odstínů od nejtmařejší po nejsvětější) odpovídá absolutní hodnotě detailních wavelet koeficientů. Hodnota těchto koeficientů je tím větší, čím větší je shoda mezi průběhem signálu a tvarem wavelet funkce při daném posunutí a měřítku wavelet okénka.



Obrázek 3: Potlačování rušivých složek EKG signálu prahováním detailních koeficientů DWT do třetí úrovně a presentace (a) původního a degradovaného EKG signálu, (b) původního a zvýrazněného EKG signálu, (c) dekompozice a rekonstrukce do třetí úrovně pomocí *sym4* wavelet funkce, (d) wavelet koeficientů degradovaného signálu a odhad prahovací úrovně  $\delta$ , (e) principu měkkého prahování, a (f) modifikovaných wavelet koeficientů pro rekonstrukci signálu

Potlačování rušivých složek signálů představující další významnou aplikaci DWT se skládá [6] ze tří po sobě následujících kroků podle obr. 3, které zahrnují

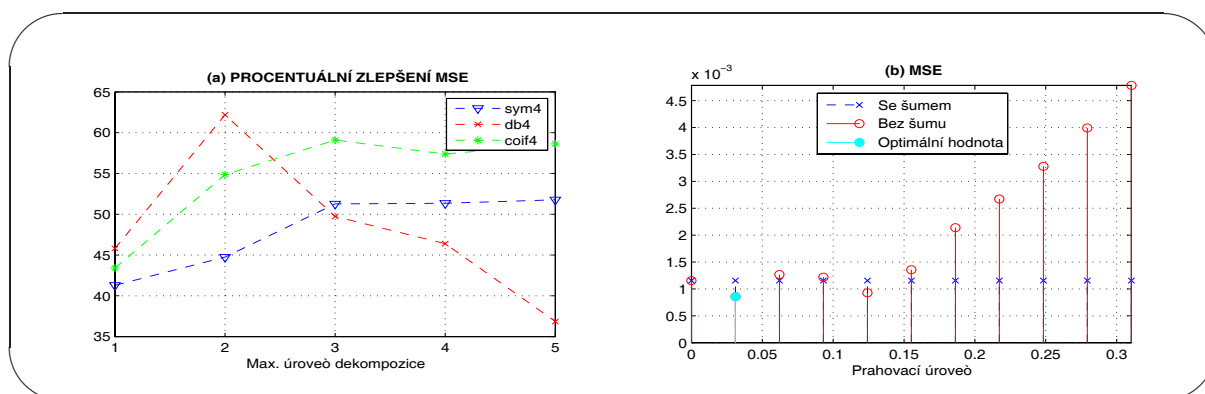
- *dekompozici* signálu do určité úrovně  $N$
- *prahování* výsledných DWT koeficientů
- *rekonstrukci* signálu s použitím upravených detailních koeficientů od úrovně 1 do  $N$  a aproximačních koeficientů z úrovně  $N$

*Prahování* koeficientů je přitom možné realizovat volbou úrovně společné pro všechny úrovně rozkladu (*global thresholding*) nebo je možné tuto úroveň odlišit pro dílčí dekompoziční složky a aplikovat prahování lokální (*level-dependent thresholding*). Při aplikaci prahování lze volit [3] prahování měkké (*soft*) a tvrdé (*hard*) nebo volit vlastní prahovací algoritmy. Při tvrdém prahování se vynulují koeficienty jejichž absolutní hodnota je menší než  $\delta$  podle vztahu

$$y_{hard}(n) = \begin{cases} x(n) & \text{pro } |x(n)| > \delta \\ 0 & \text{pro } |x(n)| \leq \delta \end{cases} \quad (5)$$

Měkké prahování probíhá stejným způsobem, ale navíc se hodnota  $\delta$  odečítá od absolutních hodnot koeficientů větších než  $\delta$

$$y_{soft}(n) = \begin{cases} \text{sign}(x(n)) (|x(n)| - \delta) & \text{pro } |x(n)| > \delta \\ 0 & \text{pro } |x(n)| \leq \delta \end{cases} \quad (6)$$



Obrázek 4: Výsledky potlačování rušivé složky EEG signálu a průběh (a) procentuálního zlepšení MSE pro různé wavelet funkce a různé maximální úrovně wavelet dekompozice a (b) hledání optimální hodnoty prahu

V porovnání s tvrdým prahováním nezpůsobuje měkké prahování nespojitosti ve výsledném zrekonstruovaném signálu. V Matlabu se měkké prahování používá implicitně k odstraňování rušivých složek a tvrdé prahování ke kompresi [6].

Obr. 4 ukazuje výsledky optimalizace prahovacího koeficientu  $\delta$  pro odstraňování rušivé složky z EKG signálu s přidáním náhodným šumem s Gaussovským rozložením pravděpodobnosti. Kritériem je minimalizace střední kvadratické chyby MSE ve zvýrazněném obrazu. Tab. 1 shrnuje výsledky tohoto experimentu s využitím funkce *sym4*, *db4* a *coif4*. Pro každou z těchto funkcí bylo provedeno 30 pokusů pro jednotlivé maximální úrovně dekompozice (1 až 5) a jako kritérium úspěšnosti odstraňování šumu bylo přitom uvažováno procentuální zlepšení MSE. Na obr. 3 je zobrazeno globální prahování detailních wavelet koeficientů do třetí úrovně dekompozice.

Tabulka 1: ÚSPĚŠNOST V ODSTRAŇOVÁNÍ RUŠIVÉ SLOŽKY Z EKG SIGNÁLU PRO RŮZNÉ WAVELET FUNKCE A RŮZNÉ MAXIMÁLNÍ ÚROVNĚ WAVELET DEKOMPOZICE

Wavelet / Veličina		Úroveň dekompozice				
		1	2	3	4	5
<i>Sym4</i>	Průměrná MSE [E-04]	7.37	6.93	6.14	6.79	5.68
	Rozptyl MSE [E-07]	1.11	2.83	0.87	1.84	0.32
	Zlepšení MSE [%]	41.3	44.7	51.3	51.4	51.8
<i>Db4</i>	Průměrná MSE [E-04]	6.80	4.74	6.33	7.49	7.43
	Rozptyl MSE [E-08]	4.50	2.75	4.49	4.34	4.96
	Zlepšení MSE [%]	45.8	62.2	49.7	46.4	36.9
<i>Coif4</i>	Průměrná MSE [E-04]	7.10	5.66	5.15	5.95	4.87
	Rozptyl MSE [E-08]	9.57	18.0	4.22	6.09	2.03
	Zlepšení MSE [%]	43.4	54.9	59.1	57.4	58.6

### 3 Zpracování obrazů

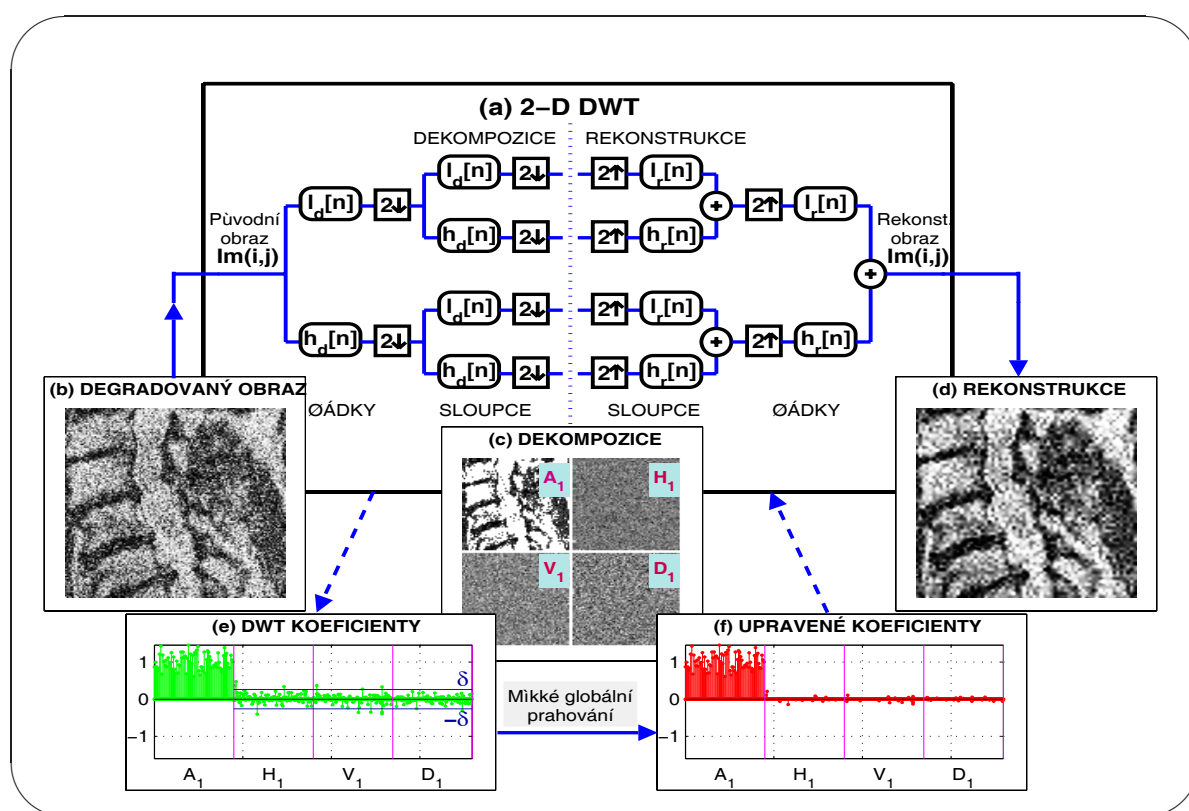
Wavelet transformace se ve zpracování obrazů používá zejména pro detekci hran a textur, kompresi dat, potlačování jejich rušivých složek a kódování charakteristických vlastností signálů pro následnou klasifikaci [6] jejich komponent. Významnou aplikační oblastí je přitom analýza biomedicínských obrazů magnetické resonance (MR) založená na prahování koeficientů DWT po jejich dekompozici vhodnou wavelet funkcí.

Princip odstraňování šumu z obrazu s použitím DWT je analogický k postupu pro zpracování jednorozměrného signálu, který může být chápán jako zvláštní forma obrazu redukováného na jeden sloupec. Postup dekompozice dokumentovaný na obr. 5 lze shrnout pro obrazovou matici  $[G(n, m)]_{N,M}$  do následujících kroků

1. Výchozí obrazová matice  $[G(n, m)]_{N,M}$  se dekomponuje do první úrovně (na detailní a aproximační složku) samostatně pro každý řádek pomocí konvoluce obrazových elementů s dekompozičními vektory hodnot  $l_d(k)$  (pro *scaling* funkci) resp.  $h_d(k)$  (pro *wavelet* funkci) a po podvzorkování dvěma se vytvoří 2 nové matice  $[G_L(n, m)]_{N,M/2}$  a  $[G_H(n, m)]_{N,M/2}$
2. Každá z matic  $[G_L(n, m)]$  a  $[G_H(n, m)]$  se zpracuje podobným způsobem po sloupcích a po podvzorkování dvěma se vytvoří celkem 4 nové matice zahrnující aproximační koeficienty  $[A_1 = G_{LL}(n, m)]_{N/2,M/2}$ , horizontální detaily  $[H_1 = G_{LH}(n, m)]_{N/2,M/2}$ , vertikální detaily  $[V_1 = G_{HL}(n, m)]_{N/2,M/2}$  a diagonální detaily  $[D_1 = G_{HH}(n, m)]_{N/2,M/2}$  původního obrazu

Matici  $A_1$  s polovičním počtem řádků i sloupců oproti matici původní lze použít následně jako základ pro další dekompozici a redukcii rozměru matice původní. Výsledek dekompozice reálného obrazu do první úrovně pro funkci funkce *sym4* je uveden na obr. 5(c) a příslušné koeficienty dílčích matic seřazené po sloupcích jsou znázorněny na obr. 5(e).

Dekompoziční matice je možno dále použít pro rekonstrukci původního obrazu podobným způsobem jako při zpracování signálů. V případě, že hodnoty matic se nemění, lze původní obraz zrekonstruovat bez ztráty informace pomocí nulových hodnot vložených mezi dekomponované prvky a s užitím rekonstrukčních filtrů  $l_r(n)$  and  $h_r(n)$ . V případě modifikace dekompozičních matic lokálním nebo globálním prahováním jejich hodnot lze však dílčí obrazové elementy potlačit. Obr. 5(f) zobrazuje výsledné koeficienty po jejich modifikaci s použitím vhodně zvolené prahové úrovně  $\delta$  a na obr. 5(d) je uveden příslušný rekonstruovaný obraz.



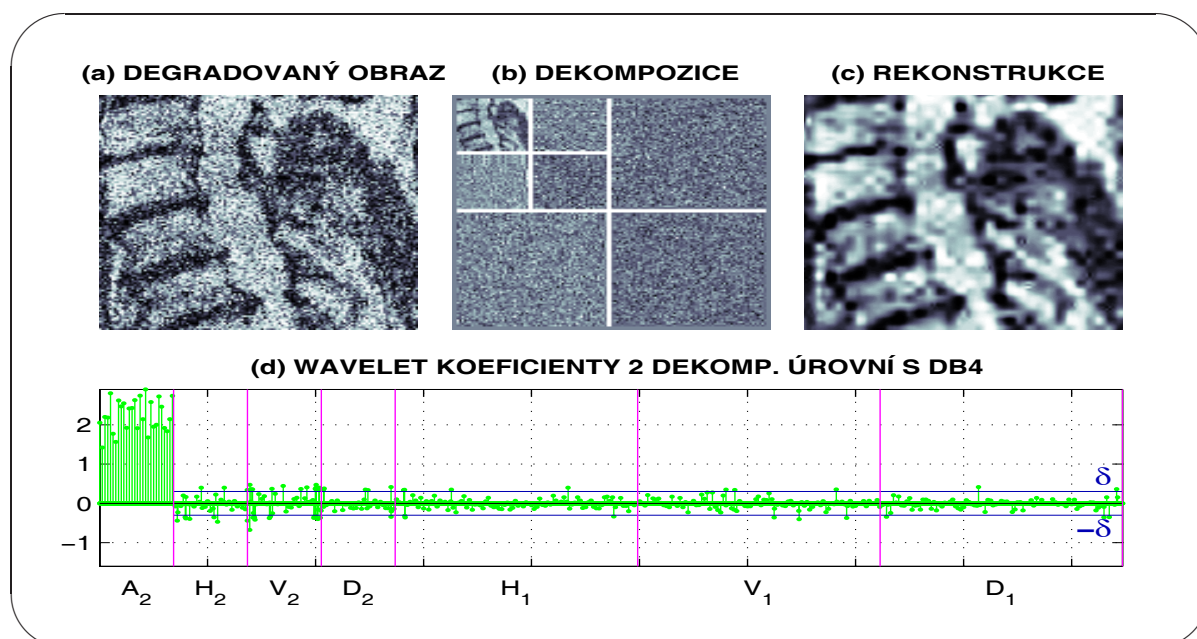
Obrázek 5: Odstranění aditivní šumové složky z MR obrazu páteře pomocí prahování DWT koeficientů a zobrazení (a) Mallatova schématu pro realizaci 2-dimenzionální DWT, (b) obrazu MR s přidáním náhodným šumem, (c) první úrovně wavelet dekompozice pro funkci *sym4*, (d) zrekonstruovaného a interpolovaného obrazu (*spline* interpolace), (e) absolutních hodnot wavelet koeficientů a (f) koeficientů upravených prahováním a použitých pro rekonstrukci

Tabulka 2: ÚSPĚŠNOST ODSTRAŇOVÁNÍ RUŠIVÉ SLOŽKY Z OBRAZU MR PRO RŮZNÉ WAVELET FUNKCE A RŮZNÉ MAXIMÁLNÍ ÚROVNĚ WAVELET DEKOMPOZICE

Wavelet / Veličina		Úroveň dekompozice				
		1	2	3	4	5
Sym4	Průměrná MSE [E-02]	2.63	1.80	2.03	3.34	4.24
	Rozptyl MSE [E-06]	2.20	2.98	3.81	3.37	1.46
	Zlepšení MSE [%]	38.1	57.7	52.4	21.4	0.0
Db4	Průměrná MSE [E-02]	2.43	1.70	1.95	3.21	4.24
	Rozptyl MSE [E-06]	1.86	2.49	2.38	3.66	1.46
	Zlepšení MSE [%]	42.6	60.1	54.3	24.5	0.0
Coif4	Průměrná MSE [E-02]	2.53	1.61	1.94	3.96	4.24
	Rozptyl MSE [E-06]	2.27	1.49	1.88	6.99	1.46
	Zlepšení MSE [%]	40.4	62.1	54.4	6.9	0.0

Pro určení prahové úrovně existuje celá řada přístupů. V uvedeném případě byla optimální hodnota prahu určována numericky hledáním minima součtu čtverců odchylek mezi původními a rekonstruovanými hodnotami pro úroveň prahu volenou v rozmezí minimálního a maximálního dekompozičního prvku podobně jako v případě jednorozměrných dat. Tab. 2 obsahuje výsledky dosažené při odstraňování přidaného náhodného šumu z obrazu MR s využitím funkcí *sym4*, *db4* a *coif4* při 30 experimentech pro dekompozice od první do páté úrovně. Kriterium úspěšnosti je přitom uváděno ve formě procentuálního zlepšení střední kvadratické chyby MSE. Nejlepší výsledky byly dosaženy při dvou úrovních dekompozice, kde byly všechny tři wavelet funkce přibližně stejně úspěšné v redukci MSE.

Na obr. 6 je znázorněno odstraňování rušivé složky pomocí prahování detailních wavelet koeficientů do druhé úrovně dekompozice s použitím *db4* wavelet funkce. Prahování je měkké a globální s hodnotou prahu určenou zmíněným optimalizačním postupem. Rozlišení zrekonstruovaného obrazu je zvýšeno pomocí *spline* interpolace.



Obrázek 6: Odstraňování šumu z obrazu MR páteře pomocí prahování detailních wavelet koeficientů znázorňující (a) obraz MR znehodnocený aditivním náhodným šumem, (b) wavelet dekompozice do druhé úrovně s použitím funkce *db4*, (c) rekonstrukce obrazu z prahovaných koeficientů a (d) wavelet koeficienty zašuměného obrazu a prahovací úroveň  $\delta$

## 4 Závěr

Cílem příspěvku bylo seznámení s možnostmi užití wavelet transformace při analýze a zpracování biomedicínských signálů a obrazů. Těžiště práce je přitom v uvedení základních algoritmických postupů dekompozice dat z hlediska jejich dalšího zpracování pro potřeby potlačování aditivních rušivých složek. Zvláštní pozornost je přitom věnována možnostem optimalizace prahovacích koeficientů pro rozdílné úrovně dekompozice a zvolené analyzující wavelet funkce s aplikací uvedeného přístupu pro zpracování EKG signálů a MR obrazu páteře.

Souhrnně lze konstatovat, že wavelet transformace poskytuje široké možnosti analýzy a zpracování signálů a obrazů s rozsáhlými aplikačními možnostmi v řadě oborů.

## 5 Poděkování

Práce vznikla v rámci výzkumného záměru MSM 6046137306 Fakulty chemicko-inženýrské na Vysoké škole chemicko-technologické v Praze. Biomedicínská data byla laskavě poskytnuta Centrem neurologické péče v Rychnově nad Kněžnou.

## Reference

- [1] D. Agraftotis and D. R. Bull and N. Canagarajah. Region of Interest Coding of Volumetric Medical Images. In *Proceedings of the 2003 International Conference on Image Processing*, volume 2, pages 217 – 220. IEEE, 2003.
- [2] I. Daubechies. The Wavelet Transform, Time-Frequency Localization and Signal Analysis. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 36:961–1005, September 1990.
- [3] T. Nguyen G. Strang. *Wavelets and Filter Banks*. Wellesley-Cambridge Press, 1996.
- [4] N. Kingsbury. Complex Wavelets for Shift Invariant Analysis and Filtering of Signals. *Journal of Applied and Computational Harmonic Analysis*, 10(3):234–253, May 2001.
- [5] N. Kingsbury, A. Zymnis, and A. Pena. DT-MRI Data Visualisation Using the Dual Tree Complex Wavelet Transform. In *IEEE International Symposium on Biomedical Imaging: Macro to Nano*, volume 1, pages 328 – 331. IEEE, 2004.
- [6] G. Oppenheim J. M. Poggi M. Misiti, Y. Misiti. *Wavelet Toolbox*. The MathWorks, Inc., Natick, Massachusetts 01760, April 2001.
- [7] S. Mallat. *A Wavelet Tour of Signal Processing*. Academic Press, San Diego, USA, 1998.
- [8] G. Menegaz, L. Grewe, and J. P. Thiran. Multirate Coding of 3D Medical Data. In *Proceedings of the International Conference on Image Processing*, volume 3, pages 656 – 659. IEEE, 2000.
- [9] D. E. Newland. *An Introduction to Random Vibrations, Spectral and Wavelet Analysis*. Longman Scientific & Technical, Essex, U.K., third edition, 1994.
- [10] R. Polikar. Wavelet tutorial. eBook, March 1999. <http://users.rowan.edu>.
- [11] J. Ptáček, M. Pánek, and A. Procházka. Wavelet transformace ve zpracování diskrétních signálů. *Automatizace*, 45(1):26–30, 2002.
- [12] C. Valens. A really friendly guide to wavelets. eBook, 2004. <http://perso.wanadoo.fr>.
- [13] K Wang, J.; Huang. Medical Image Compression by Using Three-dimensional Wavelet Transformation. *IEEE Trans. on Medical Imaging*, 15(4):547 – 554, 1996.
- [14] M. Weeks and M. A. Bayoumi. Three-Dimensional Discrete Wavelet Transform Architectures. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 50(8):2050 – 2063, 2002.



---

Prof. Aleš Procházka, Ing. Eva Hošťálková  
Vysoká škola chemicko-technologická v Praze  
Ústav počítačové a řídicí techniky  
Technická 1905, 166 28 Praha 6  
Tel: +420-220 444 198, Fax: +420-220 445 053  
E-mail: A.Prochazka@ieee.org, Eva.Hostalkova@vscht.cz