

Změny Modálních a Stabilitních vlastností nosníku v závislosti na počátečním geometrickém prohnutí a způsobu axiálního zatížení. Výpočet MKP – RFEA

Ing. Petr Bečka
AERO Vodochody a.s.

1. ÚVOD

Článek se zabývá změnou modálních a stabilitních vlastností kloubově podepřeného nosníku, v závislosti na počátečním (nezatíženém) prohnutí a na velikosti a způsobu zatížení tohoto nosníku.

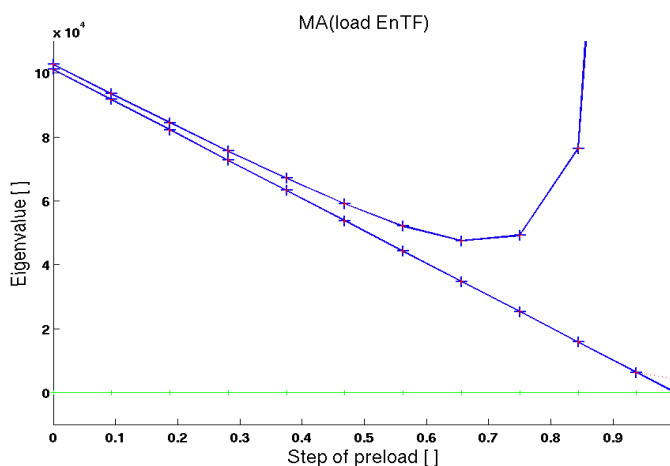
Uvedené výpočty jsou provedeny pomocí MKP v prostředí Matlab – toolbox RFEA. Stručný popis tohoto toolboxu je uveden v závěru článku.

Článek vznikl jako snaha naznačit možné příčiny “neočekávaného” chování vlastní frekvence (experimentálně zjištěné) konstrukcí při zatížení v blízkosti meze stability [2].

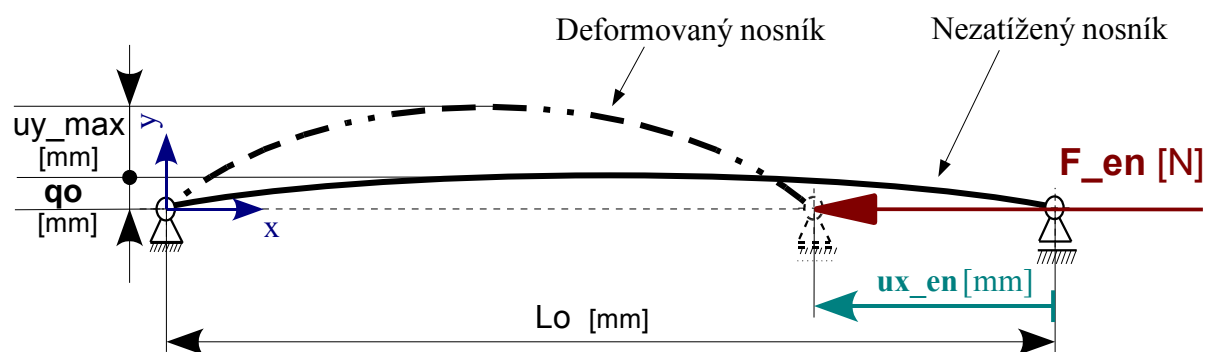
Dalším motivem bylo zjistit, jaké rozdíly v modálních a stabilitních vlastnostech nastanou, pokud objekt našeho zájmu vyjme z reálného prostředí a reálného zatížení okolní konstrukce a budeme provádět testy náhradním způsobem, tedy zatěžováním v prostředí testovacího stroje.

Dalším podnětem bylo sledování vlivu nedokonalého tvaru konstrukce (počátečního prohnutí), jehož synergické účinky ke způsobu zavedení zatížení budou také ukázány.

Jako hlavní sledované parametry modálních vlastností **MA** (Modal Analysis) a stabilitních vlastností **BA** (Buckling Analysis) budou v článku sledovány hodnoty vlastních čísel a vlastních tvarů testovaného nosníku.



2. POPIS TESTOVACÍ ÚLOHY



2.1. Popis konstrukce nosníku a definice jeho počátečního nezatíženého tvaru

Všechny následující úvahy se budou vztahovat k nosníku (viz obr. na předchozí stránce) na jednom konci kloubově uchyceného a na druhém prostě podepřeného, s následujícími geometrickými charakteristikami:

Materiál: Dural: $E = 70600 \text{ MPa}$, $\rho = 2.8 \cdot 10^{-9} \cdot (10^3 \cdot \text{kg/mm}^3)$

Geometrie řezu: $h = 2 \text{ mm}$, $b = 20 \text{ mm}$, $A = 40 \text{ mm}^2$, $J = 13.3333 \text{ mm}^4$,

Geometrie střednice nezatíženého nosníku: $L_0 = 300 \text{ mm}$, $y(x) = q_0 \cdot \sin(\pi \cdot x / L_0) \text{ mm}$

Pro navrženou soustavu bude, z hlediska geometrie, sledován vliv velikost počátečního prohnutí q_0 .

Geometrie testovaného nosníku byla zvolena s ohledem na úvahy provedené v kap. 3.3

2.2. Popis zatížení nosníku: silou (F_{en}) nebo posuvem ($u_{x_{en}}$)

Nosník je do uvažovaného staticky rovnovážného deformačního stavu uveden silovým zatížením F_{en} nebo vynuceným posuvem kloubové podpory $u_{x_{en}}$.

Nezávislým parametrem zatížení (rovnovážného stavu) budou v dalším vyhodnocení stavu dané buď silou F_{en} , nebo ekvivalentní silovou rekcí ve směru vynuceného posuvu $u_{x_{en}}$. Tedy daný zátěžný stav bude (pro oba způsoby zatížení) vždy odpovídat shodnému „statickému“ stavu napjatosti nosníku.

Měřítka zátěžových stavů, pod kterými je vykreslován postup zatížení, je označeno jako **Step of preload**, jeho nulová hodnota odpovídá nulovému zatížení a hodnota rovna 1 odpovídá **kritické Eulerově síle**: $F_{cre} = 103.23 \text{ N}$ pro uvažovaný dokonale přímý nosník.

3. ZÁKLADNÍ PRINCIPY

3.1. Popis úlohy

Krok 1) Nosník je staticky zatížen [3], [5], [6], [7], [8]

a jeho rovnovážný stav je popsán tangenciálními pohybovými rovnicemi:

$$(KSA + \Lambda ba * KD + \Lambda ma * M) * U = 0$$

kde: Globální matice systému : M - matice hmotnosti
 KSA - matice aktualizované lineární tuhosti
 KD - matice diferenciální tuhosti.

Diagonální matice vlastních čísel:

Λma (modální) => vlastní frekvence systému: f_i [hz]

$$f_i = \text{imag}(\text{sqrt}(\Lambda ma_{ii})) / (2 * \pi)$$

Λba (stabilitní) => lineární predikce ztráty stability - kritické zatížení F_{cr_i} [N]

$$F_{cr_i} = \Lambda ba_{ii} * (\text{Load_increment}_i)$$

Matice vlastních tvarů : U

Krok 2) Ze systému tangenciálních pohybových rovnic jsou určeny [5], [7], [8], [9]:

A) **Modální parametry**: vlastní čísla Λma a vlastní tvary U_{ma} systému:

($\Lambda ba_{ii} = 1$ - odpovídá aktuálnímu stavu zatížení „nenormovaná hodnota“)

$$((KSA + KD) + \Lambda ma * M) * U_{ma} = 0$$

Rovnovážný stav je staticky stabilní, pokud je Λma reálné záporné číslo.

B) **Stabilitní parametry**: vlastní čísla Λba a vlastní tvary U_{ba} systému:

($M_{ij} = 0$ odpovídá nehmotné konstrukci – hmotnost neovlivňuje statickou stabilitu)

$$(KSA + \Lambda ba * KD) * U_{ba} = 0$$

Vypočtená hodnota Λba určuje násobek aktuálního zatížení, při jehož dosažení se systém ocitne v stabilitně mezním stavu, je vztažena k aktuálnímu rovnovážnému stavu a je závislá na velikosti přírůstku zatížení mezi uvažovanými rovnovážnými stavu. Aby bylo možno snadno interpretovat výsledky je tato hodnota pro celý zatěžující cyklus normována tak, aby byla vždy vztažena k jedné hodnotě zatížení, kterou je v dále uvedených příkladech stav zborcení dokonale přímého nosníku (Eulerův vzpěr). Tedy pro $\Lambda ba_1 = 1$ => Předpovězeno zborcení při $F_{cre} = 103.23 \text{ N}$ (nebo ekvivalentním vynuceným posun $u_{x_{en}}$).

3.2. Rozdíl ve způsobu zatížení

Jak již bylo uvedeno, zatížením silou F_{en} nebo vynuceným posuvem $u_{x,en}$ bude konstrukce uvedena vždy do shodného "statického" stavu napjatosti.

Oba tyto způsoby zatížení jsou krajními případy, při uvážení, že nosník je kritickým místem reálné konstrukce, kde okrajové podmínky uložení (ve směru zatížení) vlastního nosníku nejsou přesně známy. Rozdíl v typech zatížení si také můžeme představit poměrně snadno jako rozdíl mezi reálným nosníkem zatěžovaným na konci silou (magnetickou, aerodynamickou, lidskou ...) anebo, pro případ zatížení vynuceným posuvem, jako jeho umístění do trhačích stroje či jeho lokálním náhřevem v rámci řádově tužší konstrukce.

Někde mezi těmito extrémů pak leží další reálné příklady:

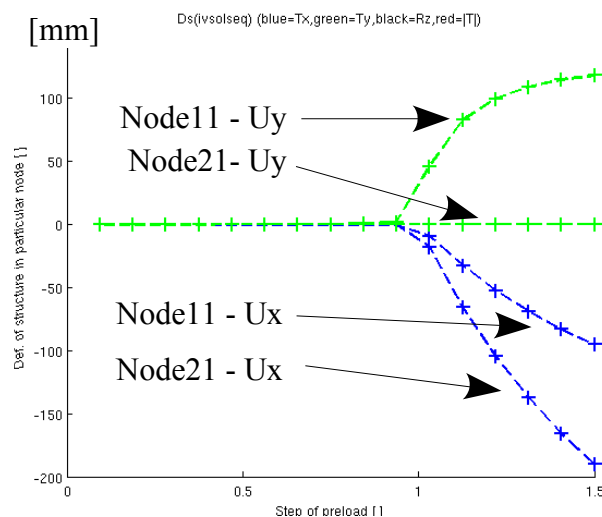
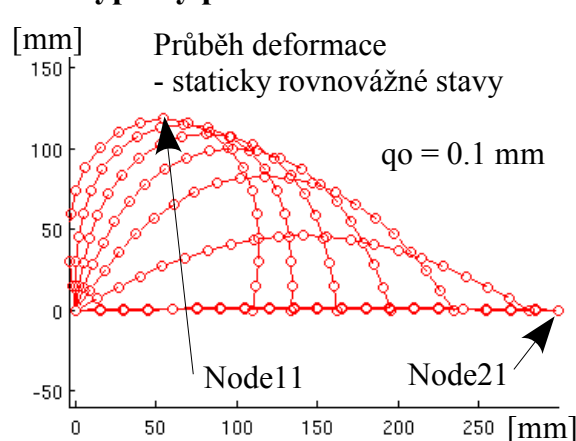
- Zatížení silou při současném připojení velké hmoty ("mimo gravitační pole") na podepřený konec nosníku - zde budou logicky ovlivněny MA vlastnosti, ale BA vlastnosti by měly zůstat totožné s případem zatížení prostou silou (kap. 5.3).
- Nosník je zabudován do konstrukce (např. mostní) nebo mechanismu - je tedy přidána tuhost. Zde by měly být ovlivněny MA i BA zcela obecně (kap. 5.3).

Praktický rozdíl mezi oběma základními způsoby zatížení je také dobře patrn při pohledu na vlastní tvary při modální analýze (pro představu předpokládejme značně prohnutý nosník). V případě zatížení silou F_{en} bude v místě pravé podpory ve směru x KMITNA, kdežto v případě vynuceného posuvu $u_{x,en}$ bude ve shodném DOF(Degree Of Freedom) UZEL.

3.3. Diskuse ztráty stability

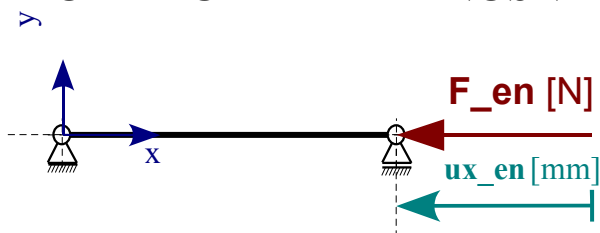
Při podrobnějším pohledu na zde prezentovanou úlohu zjistíme, že pro případy při $q_0 \approx 0$ mm vlastně nedochází ke ztrátě stability (ve smyslu její fyzikální definice), ale k silně nelineární „skokové“ změně ohybové tuhosti - v statické rovnovážné poloze má zde soustava minimum potenciální energie (lidově řečeno: „Ohybová tuhost nosníku neklesne nikdy na nulu, a tedy v okolí každé statické rovnovážné polohy to může alespoň trochu kmitat“). Toto ale není obecnou vlastností tohoto typu úloh, ale záměrné využití navržených rozměrů nosníku proto, aby úloha byla i pro zatížení větší než F_{cre} řešitelná Newton-Raphsonovu iterační metodu v MKP. Lze ale konstatovat, že závislosti dále uvedené budou mít, až do velikosti kritického zatížení F_{cre} , obecný charakter bez ohledu na chování konstrukce ve stavech po „ztrátě“ stability (ve smyslu jejího technického chápání). Poznámka: Během simulace lze ale narazit na bifurkaci (chaotické chování), a to v případě kdy použijeme zatížení vynuceným posuvem (nebo silou větší než F_{cre}) a při buzení příčného kmitání zavedeme do konstrukce větší množství energie, takové, že dojde k „přeskoku“ nosníku přes rovinu podpor do druhé rovnovážné polohy. Tento případ během řešení (pro velmi malá q_0) také několikrát nastal, ale protože v použitém explicitním řešiči není možno vybudit konstrukci vnesením kinetické energie byl tento přeskok tedy způsoben jiným zdrojem „perturbace“ - při numerickém iteračním řešení není ošetřena velikost a směr iteračního kroku ... (uvedené stavy nejsou obsaženy v publikovaných výsledcích).

3.4. Typický průběh deformací:



4. LINEÁRNÍ DEFORMACE – PŘÍMÝ NOSNÍK

$q_0 = 0 \text{ mm}$



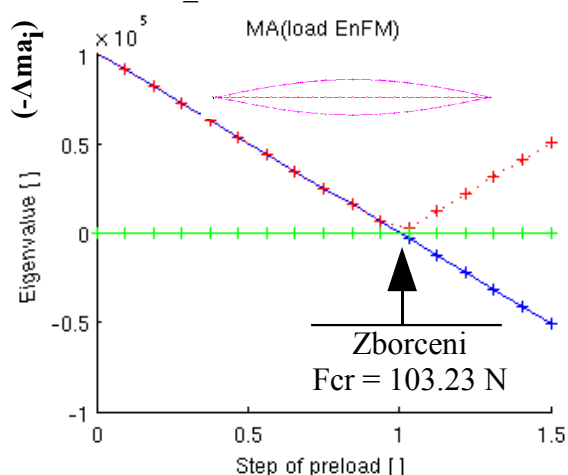
Modální vlastnosti nosníku bez zatížení

Pro model: Kloub – Podpora i Kloub -Kloub jsou modální vlastnosti totožné:

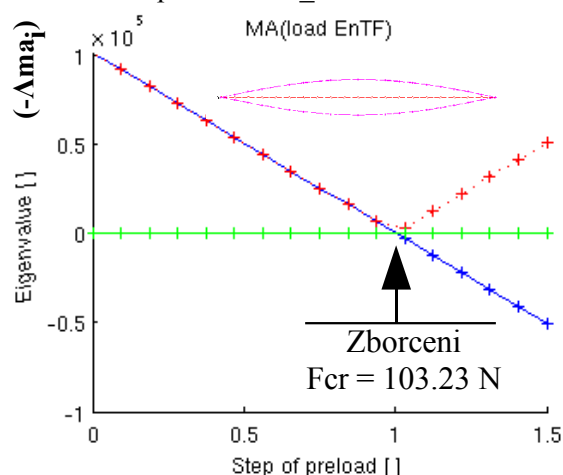
1. vlastní frekvence	$(-\Delta m a_1) = 0.1011e+06 \Rightarrow f_1 = 50.6 \text{ Hz}$	
2. vlastní frekvence	$(-\Delta m a_2) = 1.6212e+06 \Rightarrow f_2 = 202.6 \text{ Hz}$	

Modální vlastnosti $(-\Delta m a_1)$ zatíženého nosníku:

Zatížení silou F_{en}

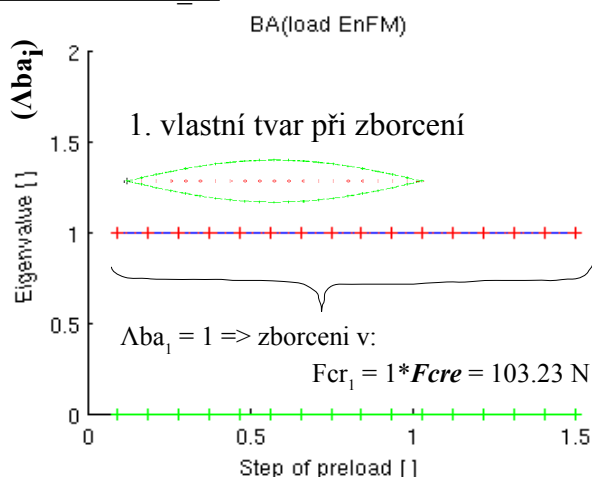


Zatížení posuvem $u_{x_{en}}$

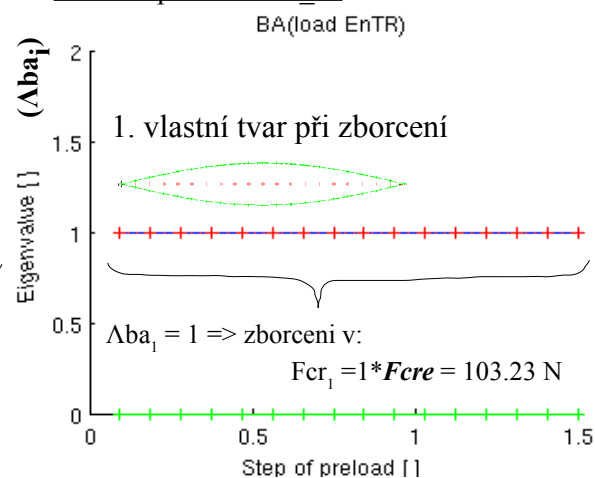


Stabilitní vlastnosti $(\Delta b a_1)$ zatíženého nosníku:

Zatížení silou F_{en}



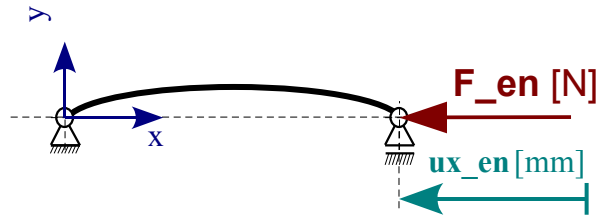
Zatížení posuvem $u_{x_{en}}$



Vypočtené hodnoty se věrně shodují s hodnotami, které lze získat analytickými výpočty. Z uvedených výsledků je také zřejmé, že u dokonale přímého nosníku nemá způsob zatěžování vliv na modální a stabilitní parametry. Toto je dáno tím, že tvary kmitu i zborcení jsou ortogonální k deformačnímu tvaru (zkrácení nosníku bez průhybu) a také ke směru směru zatěžování či vynucenému posuvu.

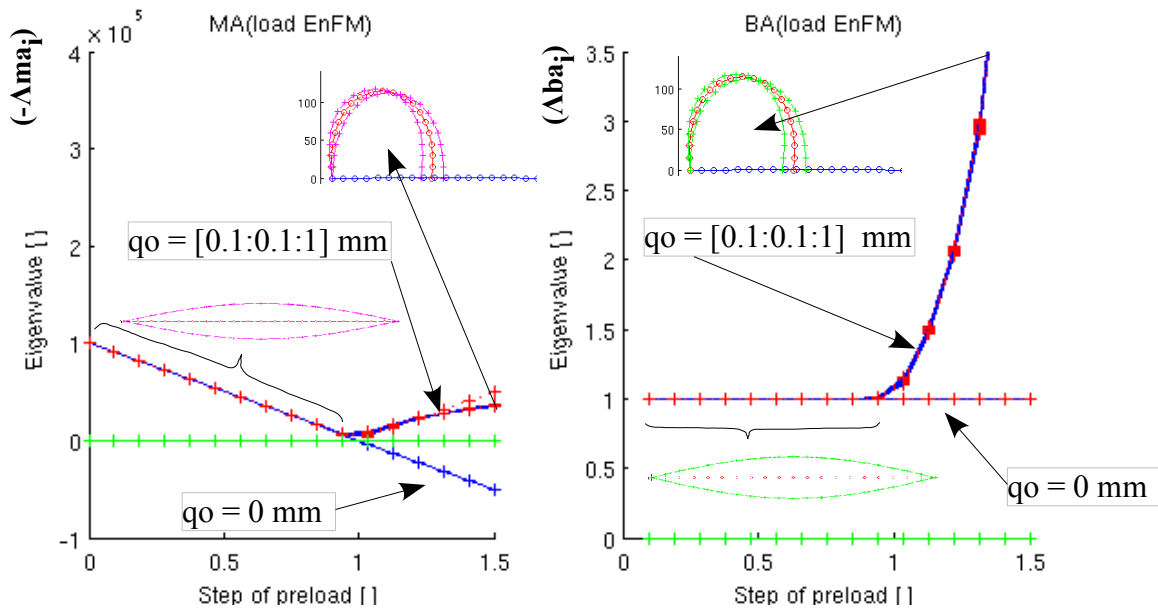
5. NELINEÁRNÍ DEFORMACE – PROHNUTÝ NOSNÍK

$q_0 > 0$ mm

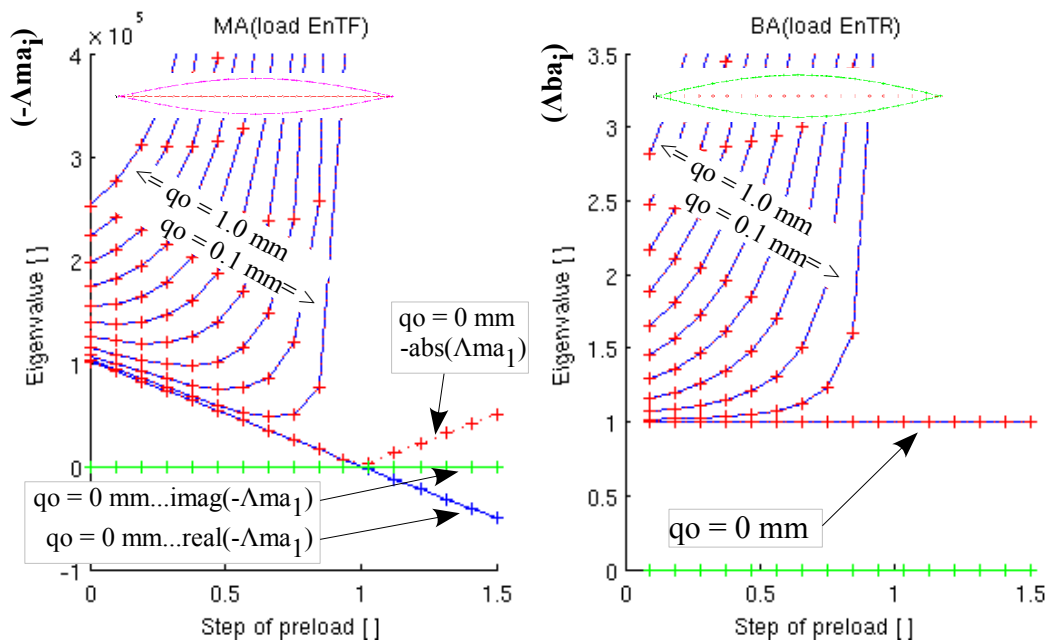


5.1. Zatížení silou (F_{en}) a posuvem ($u_{x_{en}}$) při velmi malém prohnutí ($q_0 \leq 1$ mm)

Zatížení silou: F_{en}



Zatížení vynuceným posuvem: $u_{x_{en}}$



Porovnáním uvedených závislostí je zřejmé, že modální i stabilitní parametry reagují velmi citlivě na způsob zavedení zatížení.

Pro způsob zatížení silou F_{en} a pro zatížení nižší než kritické F_{cre} , se uvedené průběhy shodují s hodnotami pro dokonale přímý nosník. Rozdíl vzniká pouze v okolí kritického zatížení F_{cre} a v post-kritickém zatížení (diskutováno v kap. 3.3). Vypočtené hodnoty se velmi dobře shodují s očekáváním [1], [2], [8].

Pro způsob zatížení posuvem u_{x_en} se hodnoty odchyli od hodnot pro dokonale přímý prut v celém rozsahu. Již od nulového zatížení se projevuje vzájemné ovlivnění kmitání DOF v ose x vzhledem k DOF v ose y. Tato vzájemná vazba propojuje dva modální tvary „příčný“ (DOF-y) s nízkou vlastní frekvencí a „podélný“ (DOF-x) s vysokou vlastní fr. Velikost této (propojovací) vazby roste spolu s počátečním prohnutím q_0 a s růstem zatížení. Tento trend je tak intenzivní, že bez problémů zvýší vlastní fr. prvního vlastního tvaru nad hodnoty vlastní fr. druhého vlastního tvaru a to i pro zatížení hluboko pod úroveň kritického zatížení F_{cre} . Na oblast, kdy „první vlastní tvar“ bude mít vyšší vlastní fr. než „druhý vlastní tvar“, je zaměřena následující kapitola.

Pokud se podíváme na uvedené výsledky z pohledu někoho, kdo nezná počáteční prohnutí q_0 ani nezná přesný způsob zatížení, je zřejmé, že identifikace vazby mezi vlastní fr. (experimentálně zjištěnou) a zatížením je krajně obtížná.

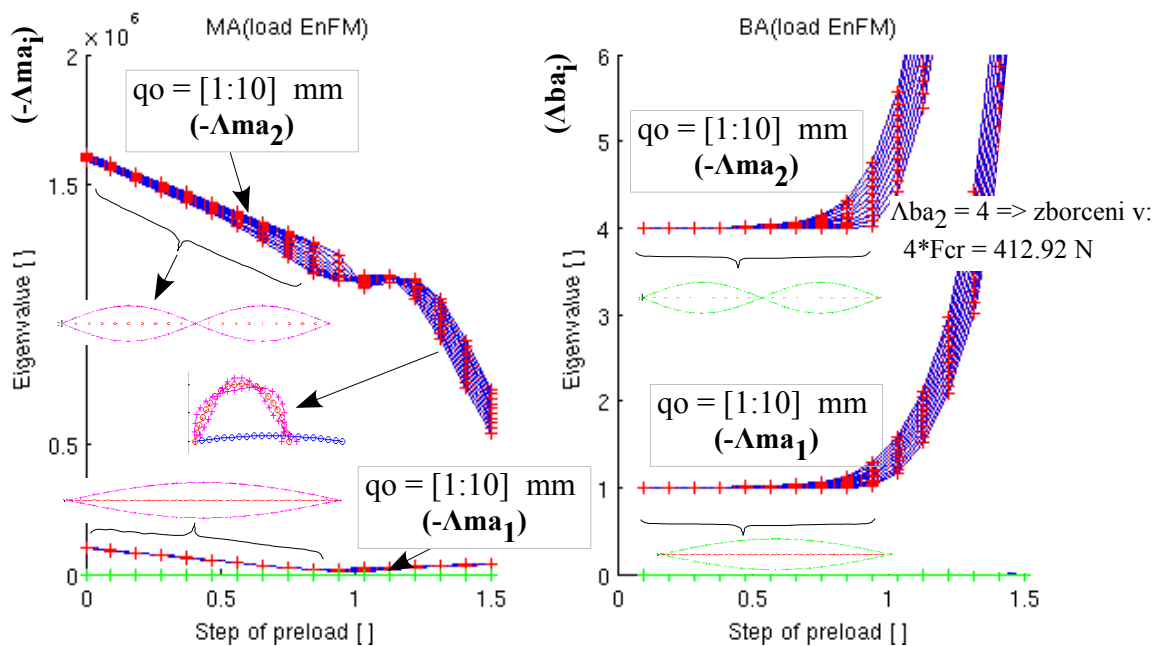
Podívejme se na stabilitní vlastnosti BA. Pro případ zatížení silou F_{en} se průběh Δb_{a1} shoduje s očekáváním (není citlivý na změnu q_0). Pro zatížení nižší než F_{cre} předpovídá kritickou sílu rovnou F_{cre} (viz kap. 3.3) a pro vyšší zatížení není možno tyto hodnoty použít pro predikci dalšího kritického stavu, neboť vypočtené hodnoty jsou velmi citlivé na velikosti zatížení a nedochází k jejich ustálení na predikci dalšího kritického stavu.

Pokusme se nyní podívat na výsledky pro zatížení vynuceným posuvem u_{x_en} z pohledu někoho, kdo se snaží získat predikci kritického zatížení pomocí MKP-BA ... Pokud by nosník byl uložen v rámci konstrukce (viz také kap. 5.4), která by se při zatěžování nosníku chovala dle vzoru vynucený posuv – nebudeme touto metodou upozorněni na skutečné zatížení, při kterém dojde k vyboulení (výrazné změně tuhosti – viz kap. 3.3).

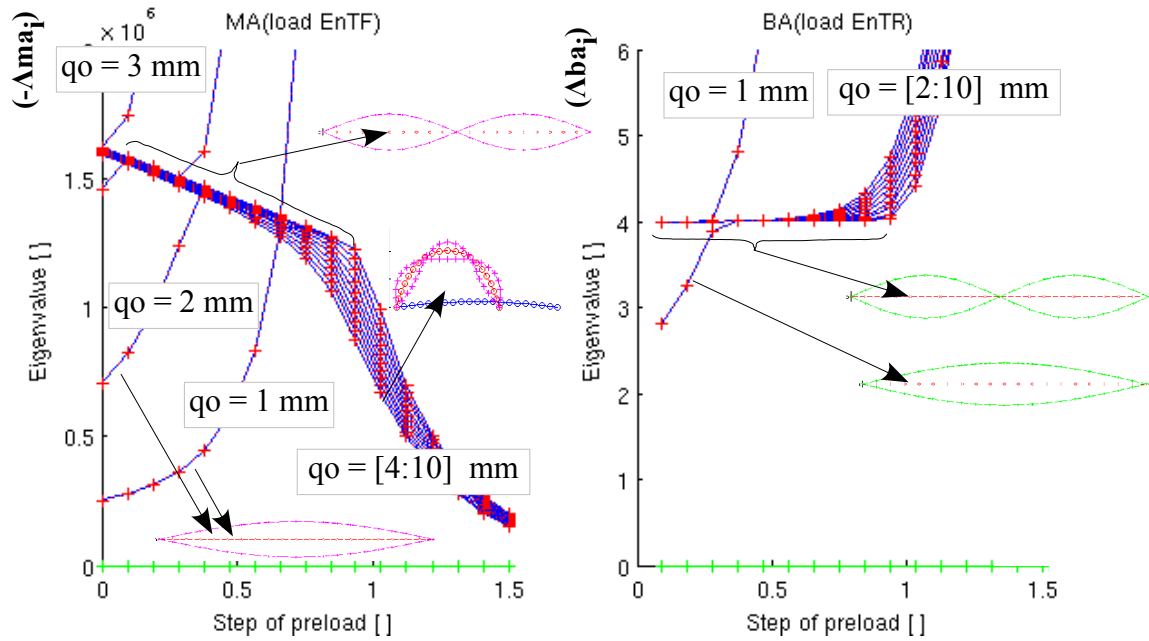
5.2. Zatížení silou(F_{en}) a posuvem(u_{x_en}) při malých prohnutích ($q_0 \geq 1$ mm)

Vypočtené průběhy v této kapitole jsou uvedeny s ohledem na případ zatížení vynuceným posuvem u_{x_en} . Je zde ukázáno, jak zatímco hodnoty pro druhý vlastní tvar a jemu příslušící vlastní fr. zůstávají víceméně necitlivé k hodnotám počátečního prohnutí q_0 , tak hodnoty vlastní fr. odpovídající prvnímu vlastnímu tvaru spolu se zvětšujícím se q_0 rostou, až se posouvají nad hodnoty vlastní fr. příslušející druhému vlastnímu tvaru.

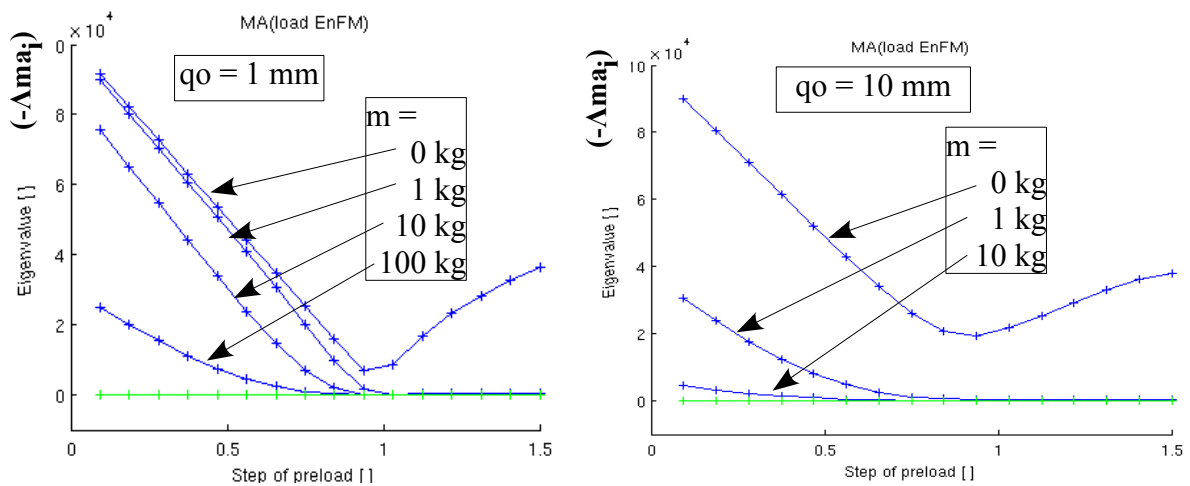
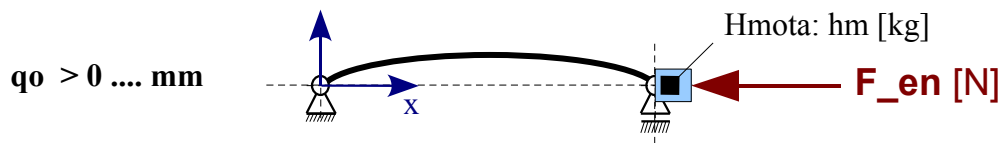
Zatížení silou: F_{en}



Zatížení vynuceným posuvem: u_{x_en}

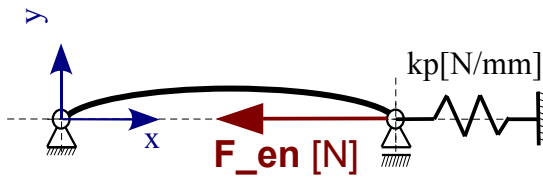


5.3. Vliv osamělé hmoty v místě zatížení



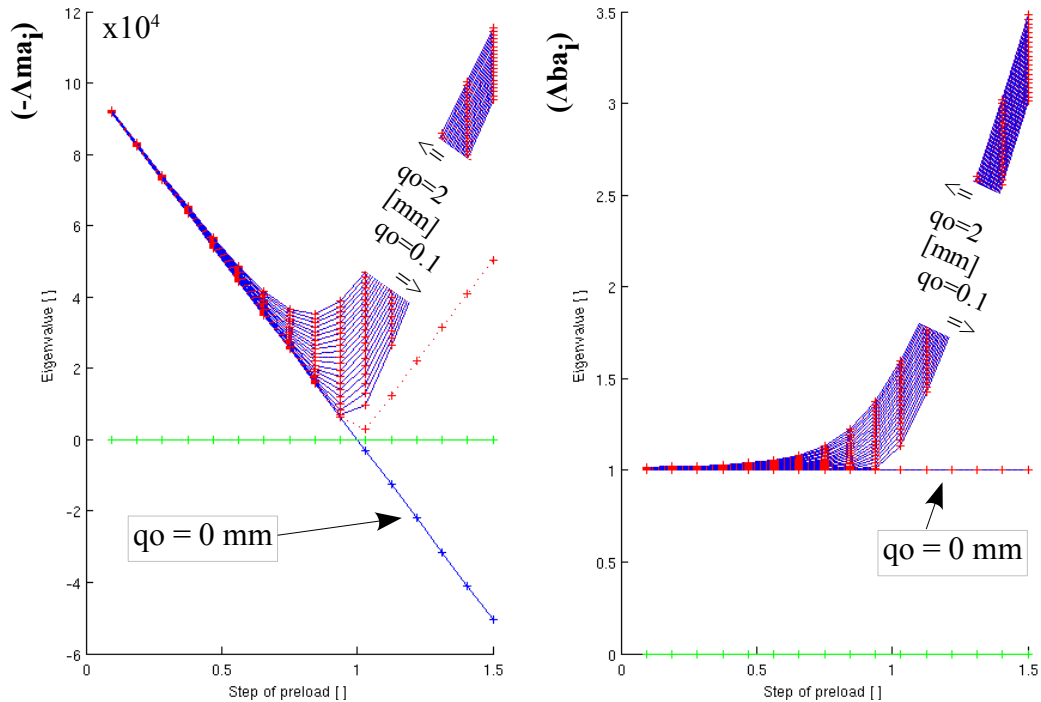
Výsledné průběhy získané výpočtem potvrdily očekávání: se vzrůstem hmotnosti klesá vlastní frekvence systému. Tyto výsledky znovu ukazují, že i nízké q_0 vede k výrazné ztrátě nezávislosti mezi modálními tvary „příčnými“ (DOF-y) a „podélnými“ (DOF-x).

5.4. Vliv přidavné tuhosti v místě a směru zatížení

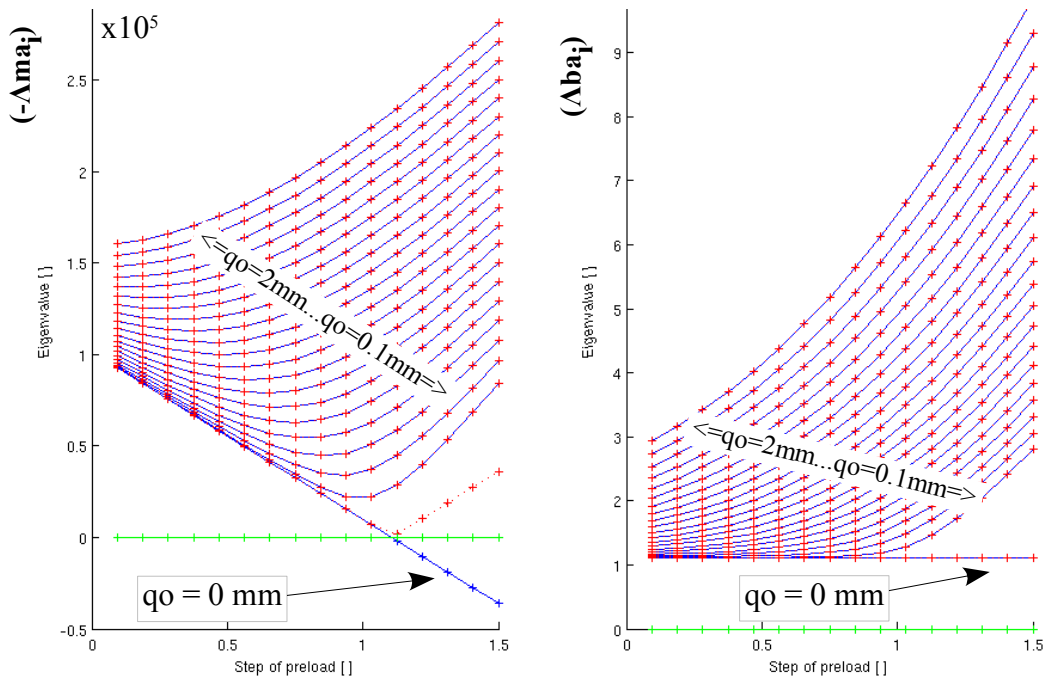


Tak jak je modelován tento případ, dochází ke zvýšení kritického zatížení (F_{cr1} vzhledem k F_{cre}) vlivem toho, že část zatěžující síly F_{en} je odebrána reakcí v pružině. Vzhledem k poměru podélné tuhosti nosníku a uvažovaných tuhostí pružiny je tento fakt až do zatížení daného F_{cre} zanedbatelný.

Nosník zatížený silou F_{en} s pružinou o tuhosti $k_p = 10 \text{ N/mm}$



Nosník zatížený silou F_{en} s pružinou o tuhosti $k_p = 1000 \text{ N/mm}$



Uvedené průběhy modálních a stabilitních parametrů naznačují, jak je vyplněn prostor mezi krajními případy zatížení silou F_{en} a vynuceným posuvem $u_{x_{en}}$ (s dokonale tuhým uložením).

6. RFEA – VÝPOČTY MKP V MATLABU

RFEA - Run Finite Element Analysis

Popis:

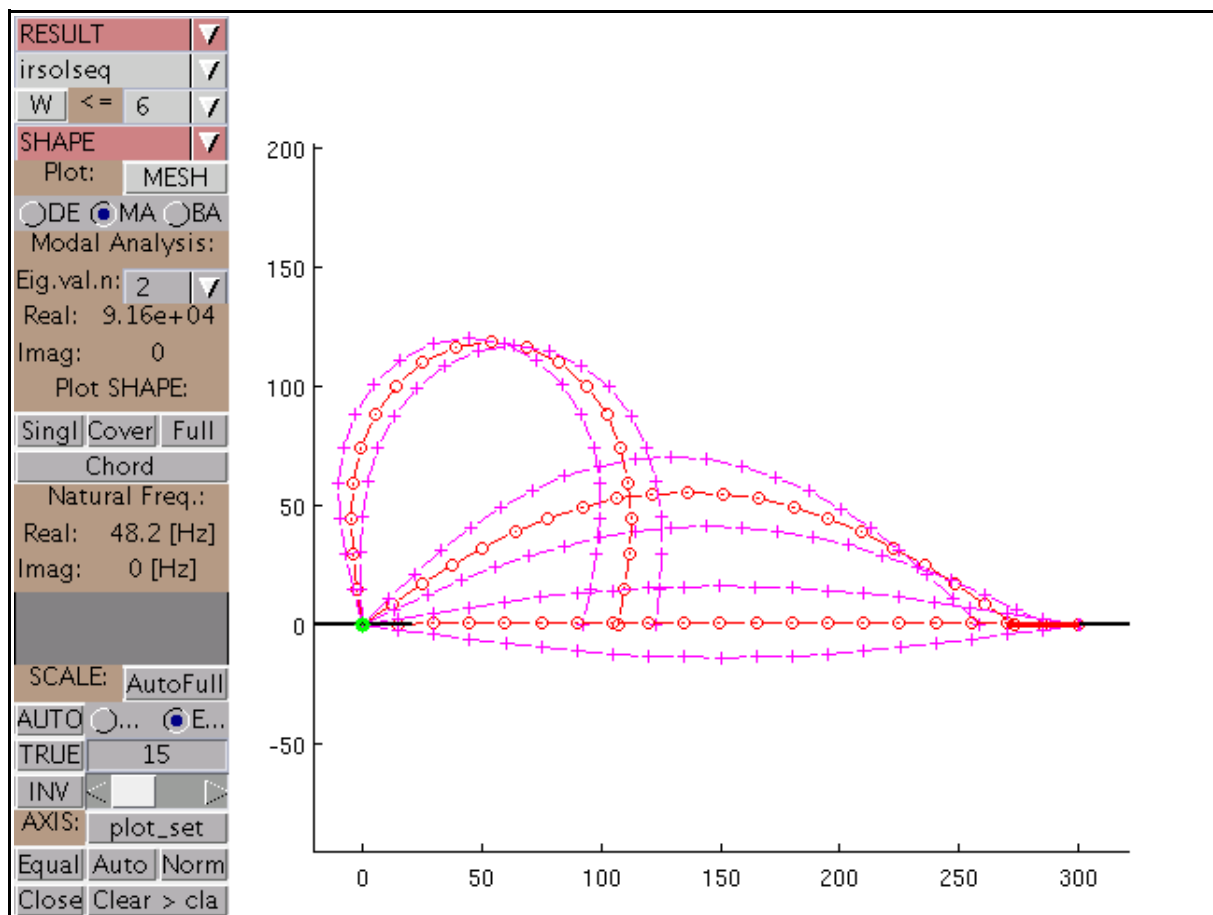
Toolbox Matlabu pro výpočet rovinných nosníkových konstrukcí pomocí MKP. Toolbox je založen na třech hlavních skriptech: *p010prepro.m*, *p020runpro.m* a *p030postpro.m*, z kterých jsou dále volány ostatní nutné funkce a skripty. Vstupní data je možno definovat přímo v prostředí Matlabu nebo pomocí datového souboru *datain.m*. Celý řešič je zapouzdřen ve funkci *rfea_sol.m*, kterou je možno spouštět v rámci jiných projektů. Pro prohlížení vstupních dat a spočtených výsledků je možno použít UGI napsané v Matlabu.

Řešič:

- Řešení rovinných úloh se třemi DOF v jednom uzlu.
- Elementy: přímé, prismatické nosníky (Bernoulli) s volitelným zakončením (kloub, vetknutí).
- Zatížení silovými i deformačními podmínkami (DOF v globálním souř.syst.).
- Geometricky lineární i nelineární výpočet (Newton-Raphsonova iterační metoda).
- Modální a Buckling Analýza konstrukce v libovolném rovnovážném stavu.

User Grafical Interface:

Jednoduché UGI prostředí pro prohlížení vstupních a spočtených dat. Základní skript *rfea_ugi.m* volá pro vykreslení požadovaných dat samostatné funkce, kterou je možno spouštět nezávisle i přímo z prostředí Matlabu.



Toolbox RFEA je volně přístupný na adrese: www.volny.cz/rfea

7. ZÁVĚR

Byl ukázán synergický účinek imperfekce konstrukce (počátečního prohnutí) a způsobu zatížení (silou nebo vynuceným posuvem) na příkladu tlačného kloubově uloženého nosníku. Vliv těchto parametrů byl sledován pomocí modálních a stabilitních parametrů v rozsahu nulového až stabilně kritického zatížení a v některých případech i v post-kritické oblasti. Dále byl také ukázán vliv přidané hmoty a tuhosti v místě zavedení zatížení.

Na několika příkladech bylo ukázáno, jak mohou tyto parametry způsobit „neočekávané“ chování konstrukce, pokud jsou uvedené synergické účinky zanedbány ve výpočtech.

Bylo provedeno stručné představení toolboxu RFEA pro výpočet rovinných nosníkových konstrukcí pomocí MKP.

8. LITERATURA:

- [1] Bažant Z.P., Cedolin L.: *Stability of Structures*, Oxford University Press, 1991, ISBN 0-19-505529-2
- [2] Singr J., Arbocz J., Weller T.: *Buckling Experiments: Experimental Methods in Buckling of Thin-Walled Structures*, 2002 by John Wiley & Sons, ISBN 0-471-97450-1
- [3] Bittnar Z., Šejnoha J.: *Numerické metody mechaniky*, ČVUT, 1992, ISBN 80-01-00901-7
- [4] Brepta R., Půst L., Turek F.: *Mechanické kmitání*, SOBOTALES, 1994, ISBN 80-901684-8-5
- [5] NASTRAN *Theoretical manual L15.5*, MSC, 1972
- [6] Kwon Y.W., Bang H.: *The Finite Element Method Using MATLAB*, 1997, ISBN 0-8493-9653-0
- [7] Bathe K.J., *Finite Element Procedures*, Prentice-Hall, 1996, ISBN 0-13-301458-4
- [8] Bečka P., Miláček S., *Non-destructive Methods for Critical Stability Load Assessment*, ZČU, 2000, ISBN 80-7082-652-5
- [9] Puchmajer P., *Stabilita pružných soustav*, ČVUT, 1987

Kontaktní informace:

Ing. Petr. Bečka, AERO Vodochody a.s., U Letiště 374, 250 70 Odolena Voda
email: petr.becka@aero.cz , rfea@volny.cz