

# SIMULAČNÍ MODEL KLIKOVÉ HŘÍDELE KOGENERAČNÍ JEDNOTKY

*E. Thöndel, Ing.*

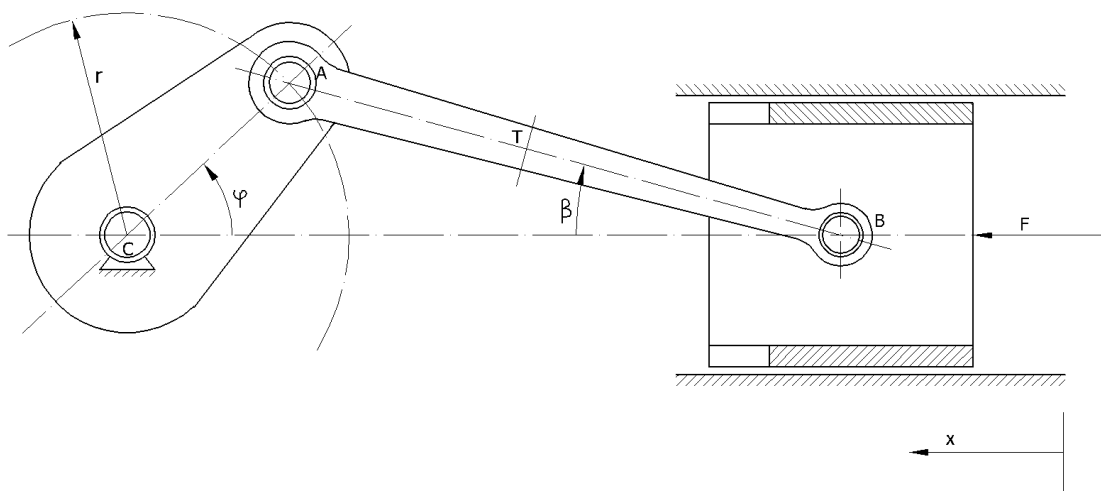
Katedra mechaniky a materiálů, FEL ČVUT v Praze

## Abstrakt

Crankshaft is a part of commonly produced heat engines. It is used for converting of motion of translation to motion of rotation. The contribution describes the construction of mathematical model of crankshaft. The model is implemented in environment Matlab-Simulink.

## 1 Úvod

Kliková hřídel je součástí všech standardně vyráběných tepelných motorů. Slouží k převodu posuvného pohybu pístu na rotační pohyb hřídele. Pro převod se používá klikového mechanismu, jak je schématicky znázorněno na obrázku 1. Matematický model tohoto mechanismu je vyvíjen v rámci celkového modelu malé kogenerační jednotky, která je poháněna parním strojem. Tento model má dále sloužit k dalšímu zkoumání a k optimalizaci vlastností uvedené kogenerační jednotky.



Obrázek 1: Klikový mechanismus.

Další text uvádí podrobné odvození pohybové rovnice klikového mechanismu podle obrázku 1 a její implementaci v programovém prostředí Matlab-Simulink.

## 2 Pohybová rovnice

Při odvozování pohybové rovnice budeme postupovat podle metody redukce sil a hmot, která vychází z rovnice 1.

$$I_{red} \cdot \ddot{\varphi} + \frac{1}{2} \frac{dI_{red}}{d\varphi} \dot{\varphi}^2 = Q_{red} \quad (1)$$

V této rovnici představuje  $I_{red}$  celkový redukovaný moment setrvačnosti a  $Q_{red}$  celkový redukovaný moment. Nalezení těchto dvou výrazů je tedy nutné pro sestavení pohybové rovnice. Z uvedeného vztahu také vyplývá, že soustava má jeden stupeň volnosti, kterým je úhel natočení kliky  $\varphi$ .

## 2.1 Redukovaný moment setrvačnosti

Klikový mechanismus je podle obrázku 1 složen ze tří částí. Těmito částmi jsou klika, ojnice a píst. Pro vyjádření celkového redukovaného momentu setrvačnosti najdeme nejprve výraz pro kinetickou energii soustavy ve tvaru rovnice 2.

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot I_{red} \cdot \dot{\varphi}^2 \quad (2)$$

Každá část mechanické soustavy přispívá svým dílem do celkové kinetické energie. Kinetická energie soustavy bude tedy obsahovat tři složky a lze ji vyjádřit podle rovnice 3 jako součet kinetických energií pro kliku, ojnici a píst.

$$E_k = E_{k,k} + E_{k,p} + E_{k,o} \quad (3)$$

Ze vztahu 2 a 3 vyplývá, že i celkový redukovaný moment setrvačnosti soustavy můžeme vyjádřit jako součet redukovaných momentů setrvačnosti jednotlivých složek mechanické soustavy.

$$I_{red}(\varphi) = I_{red,k}(\varphi) + I_{red,p}(\varphi) + I_{red,o}(\varphi) \quad (4)$$

Dále se budeme zabývat odvozením redukovaných momentů setrvačnosti jednotlivých složek mechanické soustavy.

**Klika** vykonává rotační pohyb a výraz pro její kinetickou energii tedy můžeme vyjádřit podle rovnice 5.

$$E_{k,k} = \frac{1}{2} \cdot I_k \cdot \dot{\varphi}^2 \quad (5)$$

Předpokládáme-li znalost momentu setrvačnosti kliky vzhledem k ose otáčení, můžeme redukovaný moment setrvačnosti kliky napsat

$$I_{red,k} = I_k. \quad (6)$$

V případě **pístu** již tento výraz tak jednoduchý nebude. Píst vykonává pouze translační pohyb ve směru osy  $x$ . Výraz pro kinetickou energii napíšeme ve tvaru uvedeném v rovnici 7.

$$E_{k,p} = \frac{1}{2} \cdot m_p \cdot \dot{x}^2 \quad (7)$$

V tomto výrazu představuje  $m_p$  známou hmotnost pístu a proměnná  $x$  představuje polohu válce. Naše mechanická soustava, jak již bylo uvedeno, je soustava s jedním stupněm volnosti. Jako nezávisle proměnnou jsme si vybrali úhel natočení kliky  $\varphi$ . Tuto proměnnou jsme zvolili z důvodu dalšího využití modelu. Proměnná  $x$  je tedy závisle proměnnou a pro další práci s ní je nutné tuto závislost vyjádřit. Aplikací jednoduchých vztahů z trigonometrie můžeme závislost zapsat výrazem

$$x = (L + r) - (r \cos \varphi + L \cos \beta), \quad (8)$$

kde  $L$  je délka ojnice a  $r$  je poloměr kliky. Definujme dále konstantu  $k$  jako poměr těchto dvou veličin. Tato konstanta nám zjednoduší některé výrazy.

$$k = \frac{r}{L} = \frac{\sin \beta}{\sin \varphi} \quad (9)$$

Jedná se v podstatě o aplikaci sinové věty. Výraz  $\cos \beta$  můžeme s využitím zavedené konstanty  $k$  a rovnosti  $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$  vyjádřit následujícím způsobem.

$$\cos \beta = \sqrt{1 - (k^2 \sin^2 \varphi)} \quad (10)$$

Dosazením rovnice 10 do rovnice 8 a jednoduchou úpravou vyjádříme závislost proměnné  $x$  na proměnné  $\varphi$  ve formě následujícího výrazu.

$$x = r(1 - \cos \varphi) + L \left( 1 - \sqrt{1 - (k^2 \sin^2 \varphi)} \right) \quad (11)$$

Aby bylo možné dosadit do rovnice 7 kinetické energie pístu, je nutné ještě celý výraz derivovat podle času.

$$\dot{x} = \dot{\varphi} \cdot \left( r \sin \varphi + \frac{1}{2} L \frac{k^2 \sin 2\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \right) \quad (12)$$

Dosazením rovnice 12 do rovnice 7 můžeme konečně vyjádřit vztah pro kinetickou energii pístu  $E_{k,p}$ .

$$E_{k,p} = \frac{1}{2} m_p \left( r \sin \varphi + \frac{1}{2} L \frac{k^2 \sin 2\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \right)^2 \dot{\varphi}^2 \quad (13)$$

Porovnáním rovnice 13 a rovnice 2 můžeme redukovaný moment setrvačnosti pístu napsat ve tvaru

$$I_{red,p} = m_p \left( r \sin \varphi + \frac{1}{2} L \frac{k^2 \sin 2\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \right)^2. \quad (14)$$

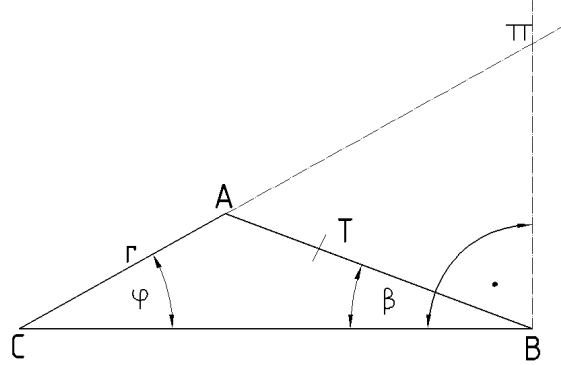
Pro vyjádření celkového redukovaného momentu setrvačnosti soustavy nám tedy zbývá jen určit výraz pro **ojnici**. Ojnice vykonává jak translační tak rotační pohyb. Předpokládáme, že známe hmotnost ojnice  $m_o$  a moment setrvačnosti vzhledem k těžišti  $I_{o,T}$ . Dále známe polohu těžiště  $L_{A,T}$  (viz obrázek 1). Obecný tvar výrazu kinetické energie ojnice je uveden v rovnici 15.

$$E_{k,o} = \frac{1}{2} m_o \cdot c_T^2 + \frac{1}{2} I_{o,T} \cdot \omega_T^2 \quad (15)$$

Rychlost  $\omega_T$  stanovíme pomocí okamžitého pólu  $\pi$ , který leží v průsečíku normál k trajektoriím bodů  $A$  a  $B$  (viz obrázek 2). Dá se ukázat, že úhlová rychlost  $\omega_T$  rotace těžiště ojnice je rovna úhlové rychlosti  $\omega_\pi$  rotace kolem okamžitého pólu. Platí tedy vztah

$$\omega_T = \omega_\pi. \quad (16)$$

Konstrukce okamžitého pólu  $\pi$  je názorně ukázána na obrázku 2, kde jednotlivé body  $A$ ,  $B$ ,  $C$  a úhly  $\varphi$  a  $\beta$  odpovídají bodům a úhlům z obrázku 1.



Obrázek 2: Konstrukce okamžitého pólu  $\pi$ .

Úhlovou rychlost  $\omega_\pi$  můžeme podle obrázku 2 vyjádřit vztahem

$$\omega_\pi = \frac{c_A}{\varrho_{A,\pi}} = \frac{r}{\varrho_{A,\pi}} \cdot \dot{\varphi}, \quad (17)$$

kde  $c_A$  označuje rychlost bodu  $A$  a  $\varrho_{A,\pi}$  je velikost polohového vektoru bodu  $A$  vzhledem k pólu  $\pi$ . Využitím elementární trigonometrické matematiky můžeme vyjádřit  $\varrho_{A,\pi}$  a dosadit do rovnice 17. Tím získáme výraz pro úhlovou rychlost okamžitého pólu a zároveň podle rovnice 16 i úhlovou rychlost ojnice kolem těžiště. Tento výraz zapíšeme s využitím konstanty  $k$  ve formě vztahu 18.

$$\omega_\pi = \omega_T = \frac{k \cos \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \dot{\varphi} \quad (18)$$

K úplnému vyjádření kinetické energie ojnice nám chybí rychlost  $c_T$ . Tu lze stanovit několika způsoby. První způsob vychází z rotace kolem okamžitého pólu  $\pi$  a rychlost  $c_T$  vyjádříme výrazem  $c_T = \omega_\pi \cdot \varrho_{T,\pi}$ , kde  $\varrho_{T,\pi}$  je velikost polohového vektoru těžiště ojnice vzhledem k pólu  $\pi$ . Druhý způsob vychází z určení polohy bodu těžiště  $T$ , přičemž rychlost  $c_T$  vyjádříme jako velikost derivace polohového vektoru. Právě tento druhý způsob je použit z důvodu snazší implementace v další realizaci modelu.

Vyjděme z obrázku 2. Složky bodu  $T$  označíme  $[X_T, Y_T]$  a vyjádříme je ve tvaru

$$\begin{aligned} X_T &= x + (L - L_{A,T}) \cos \beta, \\ Y_T &= (L - L_{A,T}) \sin \beta. \end{aligned} \quad (19)$$

V předchozí rovnici 19 je názorně vidět, že těžiště ojnice koná translační pohyb ve směru osy  $x$  a rotační pohyb s poloměrem  $(L - L_{A,T})$ . Výraz  $\cos \beta$  jsme již vyjádřili v rovnici 10. Pro

vyjádření výrazu  $\sin \beta$  využijeme definici konstanty  $k$  z rovnice 9. Dosazením do rovnice 19 a jednoduchou úpravou získáme výrazy pro složky bodu  $T$ .

$$\begin{aligned} X_T &= r(1 - \cos \varphi) + L - L_{A,T} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}, \\ Y_T &= k(L - L_{A,T}) \sin \varphi. \end{aligned} \quad (20)$$

Derivací výrazu 20 dostáváme složky vektoru rychlosti  $\vec{c}_T$ . Jeho velikost určíme známým vztahem  $c_T = \sqrt{\dot{X}_T^2 + \dot{Y}_T^2}$ .

$$\begin{aligned} \dot{X}_T &= \left[ r \sin \varphi + L_{A,T} \frac{1}{2} \frac{k^2 \sin 2\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \right] \dot{\varphi}, \\ \dot{Y}_T &= [k(L - L_{A,T}) \cos \varphi] \dot{\varphi} \end{aligned} \quad (21)$$

Tímto jsme získali všechny potřebné výrazy k vyčíslení kinetické energie ojnice. Dosazením  $c_T$  a  $\omega_T$  do rovnice 15 získáme výraz kinetické energie ojnice ve tvaru  $E_{k,o} = \frac{1}{2} I_{red,o} \cdot \dot{\varphi}^2$ , kde  $I_{red,o}$  je hledaný redukovaný moment setrvačnosti.

$$I_{red,o} = m_o \left[ \left( r \sin \varphi + L_{A,T} \frac{1}{2} \frac{k^2 \sin 2\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \right)^2 + [k(L - L_{A,T}) \cos \varphi]^2 \right] + I_{o,T} \frac{k^2 \cos^2 \varphi}{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \quad (22)$$

Nyní máme již všechny složky celkového redukovaného momentu setrvačnosti klikového mechanismu. Derivaci výrazu redukovaného momentu setrvačnosti podle proměnné  $\varphi$ , tak aby ho bylo možné dosadit do rovnice 1, už nebudeme pro jeho složitost uvádět a při realizaci použijeme funkce symbolického toolboxu Matlabu. V následující kapitole odvodíme výraz pro redukovaný moment.

## 2.2 Redukovaný moment

Redukovaný moment  $Q_{red}$  uvedený ve výrazu 1 v sobě zahrnuje všechny síly a momenty působící na mechanickou soustavu. Na obrázku 1 je zobrazena síla působící na píst. Tato síla je výslednicí tlakových sil působících ve válci. Dále budeme uvažovat zatěžující moment  $M_z$  působící na hřídeli. Podle principu virtuálních prací platí vztah 23.

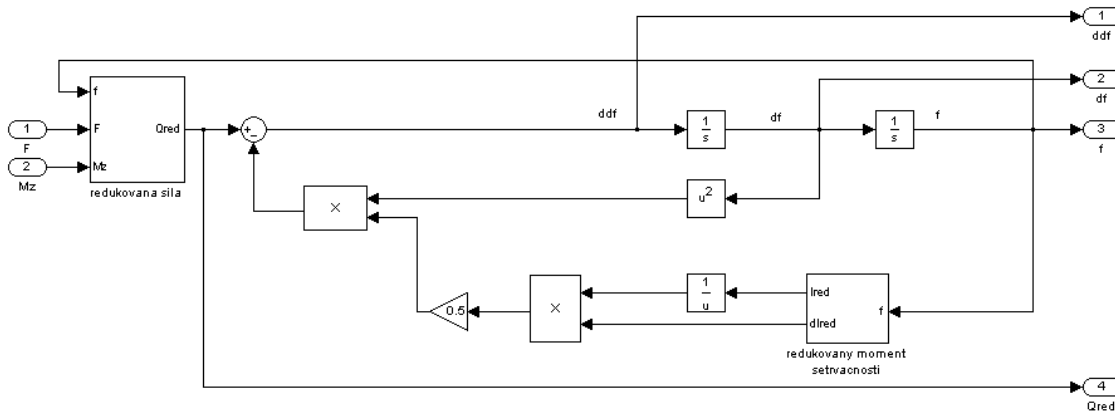
$$Q_{red} \cdot \delta\varphi = \sum_{j=1}^N \delta W_j = F \cdot \delta x - M_z \cdot \delta\varphi \quad (23)$$

Diferenciál  $\delta x$  můžeme vyjádřit z rovnice 12. Dosazením do rovnice 23 získáme výraz pro redukovaný moment  $Q_{red}$ , který po jednoduché úpravě můžeme zapsat ve tvaru rovnice 24.

$$Q_{red} = F \left[ r \sin \varphi + \frac{1}{2} L \frac{k^2 \sin 2\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \right] - M_z \quad (24)$$

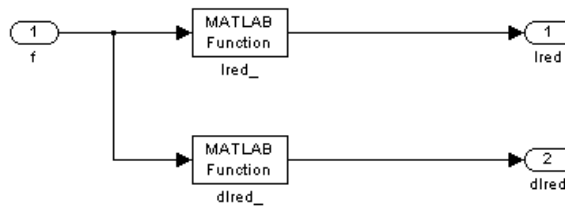
### 3 Realizace modelu v prostředí Matlab-Simulink

Odvozený model klikového mechanismu budeme nyní realizovat v prostředí Matlab-Simulink. Začneme nejprve obecným schématem výchozí rovnice 1 pro metodu redukce sil a hmot.

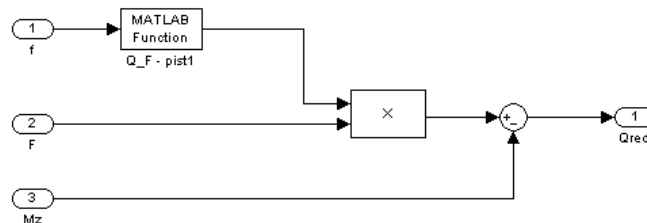


Obrázek 3: Základní struktura modelu klikového mechanismu.

Schéma uvedené na obrázku 3 obsahuje dva subbloky, které realizují redukovaný moment setrvačnosti (včetně jeho derivace podle proměnné  $\varphi$ ) a celkový redukovaný moment. Detaily těchto subbloků jsou znázorněny na obrázcích 4 a 5. Vidíme zde použití bloků s názvem *Matlab Function*, kde jsou symbolicky zapsány rovnice 4 resp. 24.



Obrázek 4: Implementace redukovaného momentu setrvačnosti.



Obrázek 5: Implementace redukovaného momentu.

### 3.1 Parametry modelu

Simulace byly provedeny pro parametry uvedené v tabulce 1.

Název	Označení	Hodnota	Jednotka
Poloměr kliky	$r$	0.065	$m$
Moment setrvačnosti kliky v ose otáčení	$I_k$	$7 \cdot 10^{-3}$	$kg \cdot m^2$
Délka ojnice	$L$	0.2	$m$
Poloha těžiště ojnice vůči bodu $A$ (viz obr. 1)	$L_{A,T}$	0.13	$m$
Hmotnost pístu	$m_p$	0.5	$kg$
Hmotnost ojnice	$m_o$	2	$kg$
Moment setrvačnosti ojnice v těžišti	$I_{o,T}$	$7 \cdot 10^{-3}$	$kg \cdot m^2$

Tabulka 1: Parametry modelu

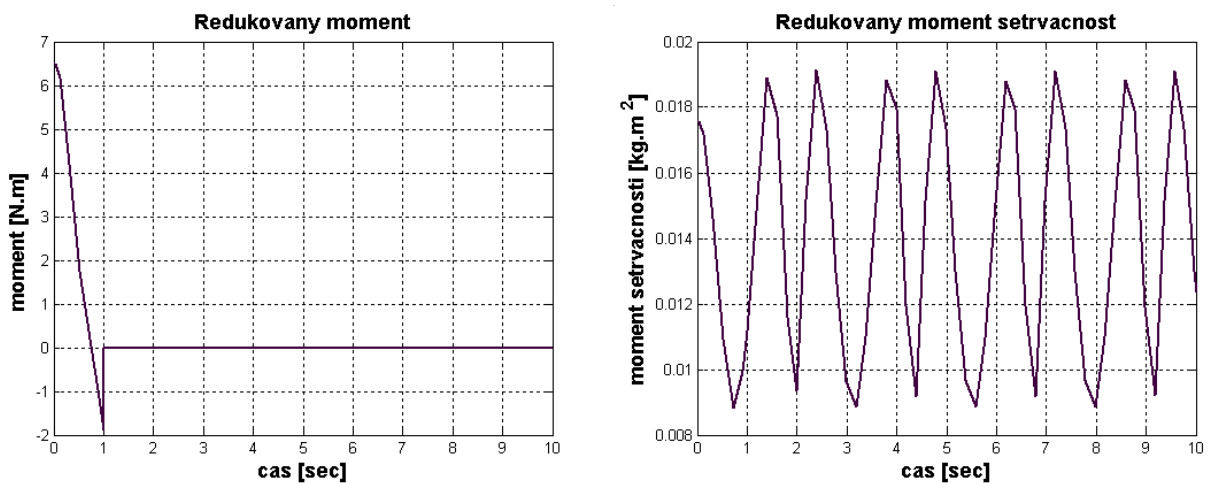
## 4 Výsledky simulace

Na následujících obrázcích jsou zobrazeny výsledky simulace modelu. Obrázek 6 ukazuje průběh budící síly působící na píst. Vidíme, že působící síla má průběh impulsu s výškou 100N a délkou trvání 1s. Zatěžující moment uvažujeme nulový. Vzhledem k tomu, že jsme v modelu zanedbali všechna tření, bude podle zákona o zachování energie celková kinetická energie (po odeznění impulsu působící síly) v čase konstantní.



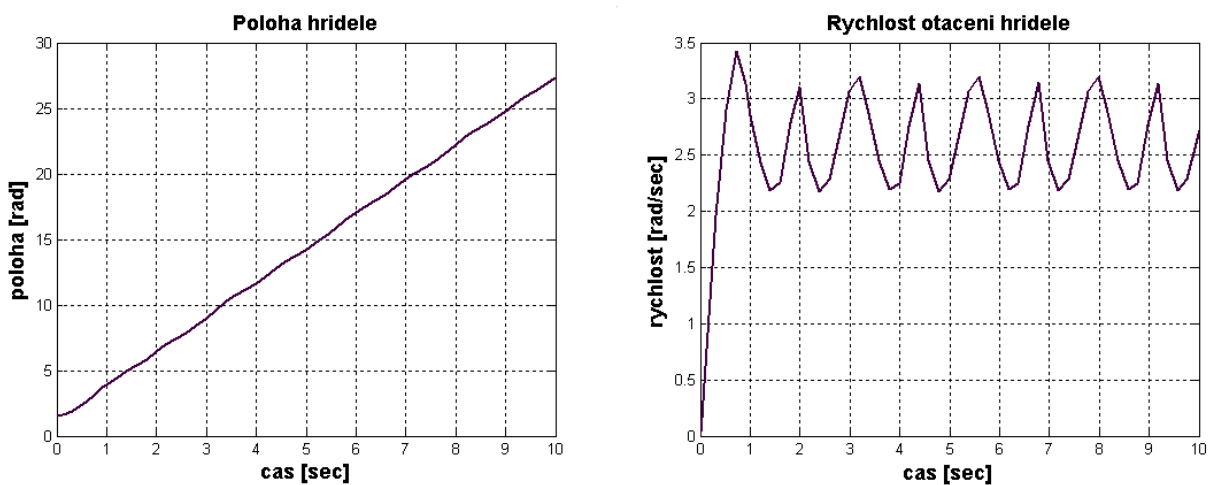
Obrázek 6: Časový průběh síly působící na píst.

Časové průběhy redukovaného momentu a redukovaného momentu setrvačnosti ukazuje obrázek 7.



Obrázek 7: Přepočtený časový průběh redukovaného momentu a redukovaného momentu setrvačnosti.

Na obrázku 8 je zobrazen časový průběh polohy a rychlosti hřídele. Počáteční poloha hřídele je nastavena na hodnotu  $\varphi(t = 0) = \frac{\pi}{2}$ . Tato počáteční podmínka je zde proto, že hodnota redukovaného momentu je v bodě  $\varphi = 0$  a  $\varphi = \pi$  také nulová, nezávisle na velikosti působící síly. Mechanismus by se tedy z těchto poloh nerozběhl. Tato skutečnost vychází z konstrukce mechanismu podle obrázku 1. V dalším rozšíření modelu budou uvažovány tři tyto mechanismy vzájemně posunutě o úhel  $\Delta\varphi = \frac{2}{3}\pi$ . Rozběh tedy bude možný z libovolné polohy.



Obrázek 8: Časový průběh polohy a rychlosti hřídele.



## 5 Závěr

V článku byl odvozen matematický model klikového mechanismu, který slouží k převodu posuvného pohybu pístu na rotační pohyb hřídele. Odvozený matematický popis byl implementován v programovém prostředí Matlab-Simulink. Výsledky simulací s parametry uvedenými v tabulce 1 ukazují obrázky 6 až 8.

## Reference

- [1] *Jirků, S.: Mechanika a termodynamika.* Ediční středisko ČVUT, Praha 1992
- [2] *Bartsch, H. J.: Matematické vzorce.* SNTL, Praha 1983

---

Ing. Evžen Thöndel  
thondee@fel.cvut.cz