VÝUKOVÝ SOFTWARE PRO ANALÝZU A VIZUALIZACI DIFRAKČNÍCH JEVŮ V OPTICE

J. Novák, P. Novák

Katedra fyziky, Fakulta stavební, České vysoké učení technické v Praze

Abstrakt

Difrakcí se rozumí ty odchylky v chování elektromagnetického vlnového pole, které nemohou být popsány a vysvětleny pomocí zákonů geometrické optiky. Difrakční jevy hrají velmi důležitou úlohu v např.oblasti optického zobrazování, kde umožňují popsat velmi dobře reálné chování obecných optických soustav, což není možno pomocí prostředků geometrické teorie. V práci byl vytvořen software ve výpočetním systému MATLAB pro výuku optiky s využitím počítačové simulace a analýzy vybraných difrakčních jevů.

1 Úvod

Difrakční jevy hrají velmi důležitou úlohu v oblasti optického zobrazování. Na rozdíl od geometrické optiky difrakční teorie optického zobrazování přihlíží k vlnovým vlastnostem světla a ke konečným rozměrům optických soustav při zobrazování. Při zobrazování bodu reálnou optickou soustavou bez aberací nebude obrazem bod, ale difrakční obrazec s prostorovým rozdělením energie. Dále se teorie difrakce se především uplatňuje při hodnocení kvality optického zobrazení, studiu difraktivních procesů na difrakčních strukturách a prvcích, v aplikacích v oblasti holografie a difraktivní optiky, apod. [1-2].

V praxi se pro výpočet difrakčních jevů používají přibližné (aproximativní) metody, jež s dostatečnou přesností umožňují získání výsledků, které velmi dobře souhlasí s praktickými experimenty. V rámci výuky fyziky si ve většině případů vystačíme se skalárním popisem šíření světla a řešíme tedy problematiku skalárního popisu difrakce světla.

V práci je ukázána možnost použití výpočetního prostředí MATLAB pro vytvoření výukového softwaru pro počítačové modelování různých difrakčních jevů ve výuce fyziky a aplikované optiky [3-6]. Pro jednotlivé případy difrakčních procesů jsou vytvořeny matematické algoritmy, které umožňují přibližný (numerický) výpočet a vizualizaci vyšetřovaných difrakčních jevů [1,4,7,8]. Takovéto počítačové programy poté mohou vhodně sloužit k názorné výuce procesů difrakce ve fyzice a jako vhodný doplněk výuky fyziky.

2 Difrakce světla

Difrakcí světla se rozumí odchylky šíření světla, které nemohou být popsány pomocí zákonů geometrické optiky. Rigorózní řešení difrakce lze získat pouze v několika málo jednoduchých geometrických případech (difrakce na klínu, válci, kouli, polorovině, apod.). V praxi se proto používají pro výpočet difrakčních jevů přibližné (aproximativní) metody, jež s dostatečnou přesností umožňují získání výsledků, které velmi dobře souhlasí s experimenty.

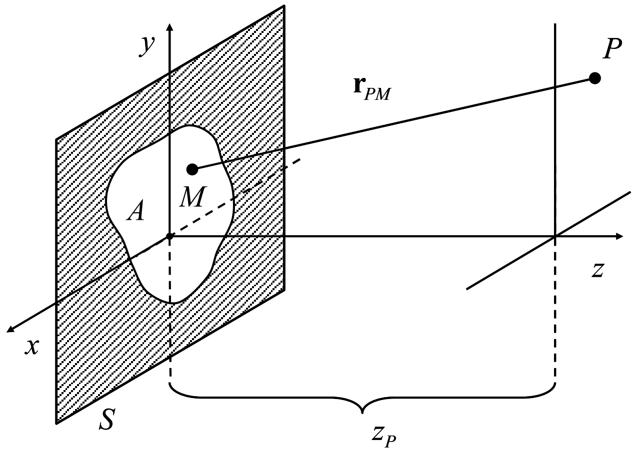
V rámci výuky fyziky ve většině případů vystačíme se skalárním popisem šíření světla. Předpokládáme tedy, že vlastnosti světla budou dostatečně přesně popsány jednou skalární funkcí, kterou může být např. složka vektoru elektrické nebo magnetické intenzity. Předpokládáme dále, že ostatní složky mohou být nezávisle zkoumány stejným způsobem. Zcela tedy ignorujeme ten fakt, že složky vektorů elektromagnetického pole jsou vázány Maxwellovými rovnicemi a nelze je z principiálního hlediska proto zkoumat nezávisle. Prováděné experimenty však ukazují, že skalární teorie difrakce dává velmi přesné výsledky jsou-li splněny podmínky, že rozměry těles na kterých nastává difrakce jsou mnohonásobně větší než je vlnová délka záření a že difrakční jevy jsou zkoumány v dostatečně velkých vzdálenostech od těles, na kterých difrakce nastává.

Předpokládejme nyní případ difrakce světla na apertuře (otvoru) A v nepropustném stínítku S (obr.1). Přijměme dále následující *hraniční podmínky*:

a) v otvoru A má pole U stejnou hodnotu jako by mělo, kdyby stínítko v daném místě nebylo,

b) na části stínítka S, která leží vně otvoru A je amplituda pole U identicky rovna nule.

Naším úkolem je určit amplitudu pole v libovolném místě P za stínítkem, za předpokladu, že známe amplitudu pole $U(M)$ v rovině otvoru stínítka.



Obr.1: Difrakce světla na otvoru ve stínítku

Sommerfeld odvodil vhodnou volbou tvaru Greenovy funkce a příslušné hraniční podmínky vztah pro komplexní amplitudu pole ve tvaru [1,2]

$$U(P) = -\frac{i}{\lambda}\iint_A U(M)\frac{\exp(ikr_{PM})}{r_{PM}}\cos(\mathbf{n},\mathbf{r}_{PM})\,\mathrm{d}A\,, \tag{1}$$

kde $P(x_P, y_P, z_P)$ je bod za stínítkem, ve kterém určujeme stav vlnového pole, $M(x_M, y_M, z_M)$ je bod v rovině otvoru A ve stínítku, $r_{PM} = |\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_M|$ je vzájemná vzdálenost bodů P a M, $\cos(\mathbf{n},\mathbf{r}_{PM})$ je kosinus úhlu, který svírá vektor normály ke stínítku $\mathbf{n}$ a průvodič $\mathbf{r}_{PM} = \mathbf{r}_P - \mathbf{r}_M$, a integraci provádíme přes plochu A otvoru stínítka. Předchozí vztah se nazývá tzv. *Sommerfeldovým řešením difrakce na otvoru* (Sommerfeldův difrakční integrál). Tento vztah nám umožňuje určit stav pole $U(P)$ v libovolném bodě P oblasti omezené plochou S, je-li známo pole $U(M)$ na této ploše.

3 Aproximativní řešení difrakce

Při řešení praktických problémů difrakce nám často geometrie vyšetřované situace dovoluje použít určité aproximace, usnadňující výpočet difrakčního integrálu (amplitudy a intenzity vlnového pole). Zabývejme se nyní dvěma nejdůležitějšími případy a to Fresnelovou a Fraunhoferovou aproximací difrakčního integrálu [1,2,8].

Fresnelova aproximace

Postup, kterým dospějeme k aproximativnímu řešení difrakčního problému si ukážeme na případě Sommerfeldova difrakčního integrálu, který se při praktickém řešení difrakčních úloh nejčastěji používá. Za předpokladu, že $kr_{PM} >> 1$, a použitím přibližných vztahů

$$r_{PM} \approx z_P + \frac{(x_P - x_M)^2 + (y_P - y_M)^2}{2z_P}, \qquad \cos(\mathbf{n},\mathbf{r}_{PM}) \approx 1\;,$$

můžeme s dostatečnou přesností aproximovat difrakční integrál (1) vztahem

$$U(P) = -\frac{i}{\lambda}\frac{\exp(ikz_P)}{z_P}\iint_A U(M)\exp\left\{\frac{ik}{2z_P}\left[(x_P - x_M)^2 + (y_P - y_M)^2\right]\right\}\mathrm{d}x_M\mathrm{d}y_M\,. \tag{2}$$

Tento vztah představuje tzv. *Fresnelovu aproximaci Sommerfeldova difrakčního integrálu*. Můžeme jej ještě dále upravit pro praktické použití do tvaru

$$U(P) = C\iint_A U(M)\exp\left[\frac{ik}{2z_P}(x_M^2 + y_M^2)\right]\exp\left[-\frac{ik}{z_P}(x_P x_M + y_P y_M)\right]\mathrm{d}x_M\mathrm{d}y_M\,,$$

kde konstanta C je dána jako

$$C = -\frac{i}{\lambda}\frac{\exp(ikz_P)}{z_P}\exp\left[\frac{ik}{2z_P}(x_P^2 + y_P^2)\right]. \tag{3}$$

Z předchozího vztahu je vidět, že výslednou amplitudu vlnového pole $U(P)$ lze vypočítat pomocí Fourierovy transformace.

Fraunhoferova aproximace

Můžeme-li (pokud nám to vyšetřovaná situace dovoluje) položit přibližně

$$\exp\left[\frac{ik}{2z_P}(x_M^2 + y_M^2)\right] \approx 1 \quad \text{nebo} \quad U(M) = T(M)\exp\left[-\frac{ik}{2z_P}(x_M^2 + y_M^2)\right], \tag{4}$$

potom docházíme k tzv. *Fraunhoferově aproximaci difrakčního integrálu*. První situace nastává v případě, kdy charakteristické rozměry otvoru, na kterém nastává difrakce, jsou mnohem menší než je vzdálenost z_P vyšetřovaného bodu od otvoru. Druhá situace nastává v případě, kdy na otvoru stínítka dochází k difrakci konvergentní kulové (nebo přibližně kulové) vlny se středem v bodě P nebo v jeho bezprostřední blízkosti. Funkce $T(M)$ charakterizuje vlastnosti této vlny v rovině otvoru stínítka. Difrakční integrál ve *Fraunhoferově aproximaci* má v prvním případě tvar

$$U(P) = C\iint_A U(M)\exp\left[-\frac{ik}{z_p}(x_p x_M + y_p y_M)\right]\mathrm{d}x_M\mathrm{d}y_M\,, \tag{5a}$$

a v druhém případě platí

$$U(P) = C\iint_A T(M)\exp\left[-\frac{ik}{z_p}(x_p x_M + y_p y_M)\right]\mathrm{d}x_M\mathrm{d}y_M\,, \tag{5b}$$

kde konstanta C je dána vztahem (3). Označíme-li dále

$$u = x_P/z_P \quad \text{a} \quad v = y_P/z_P\,,$$

potom můžeme předchozí vztahy (2.17) psát ve tvaru

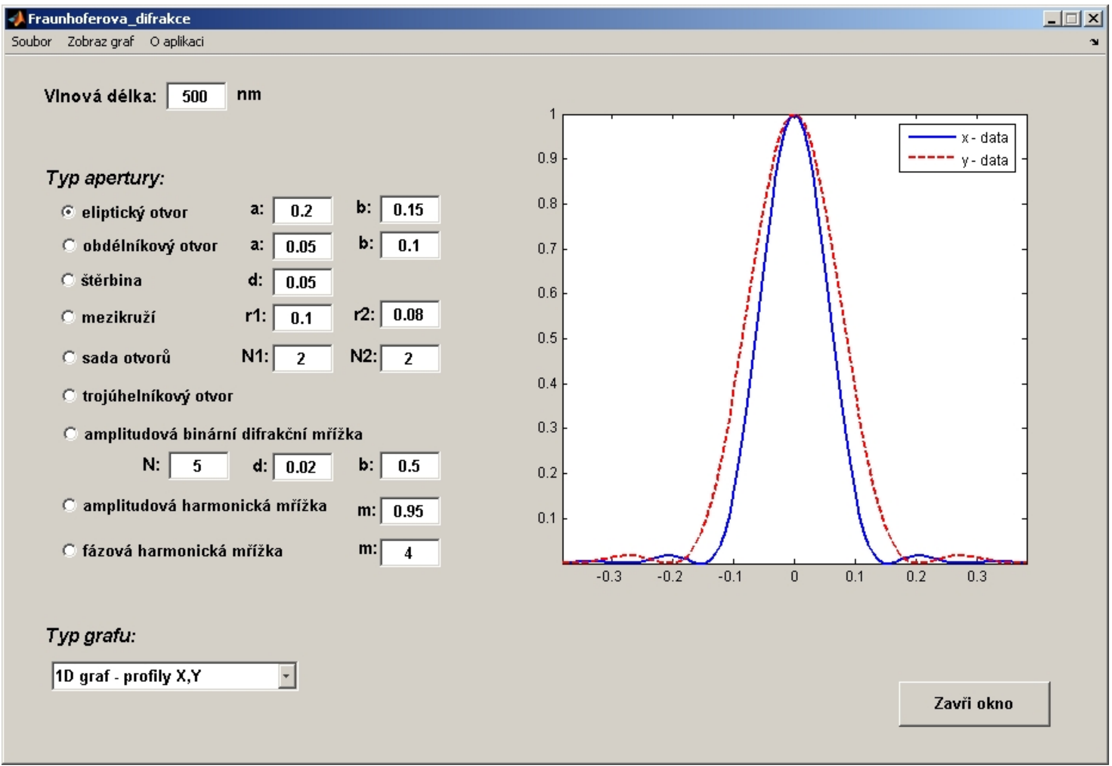
$$U(P) = C\iint_A U(M)\exp\left[-ik(ux_M + vy_M)\right]\mathrm{d}x_M\mathrm{d}y_M\,. \tag{6a}$$

$$U(P) = C\iint_A T(M)\exp\left[-ik(ux_M + vy_M)\right]\mathrm{d}x_M\mathrm{d}y_M\,. \tag{6b}$$

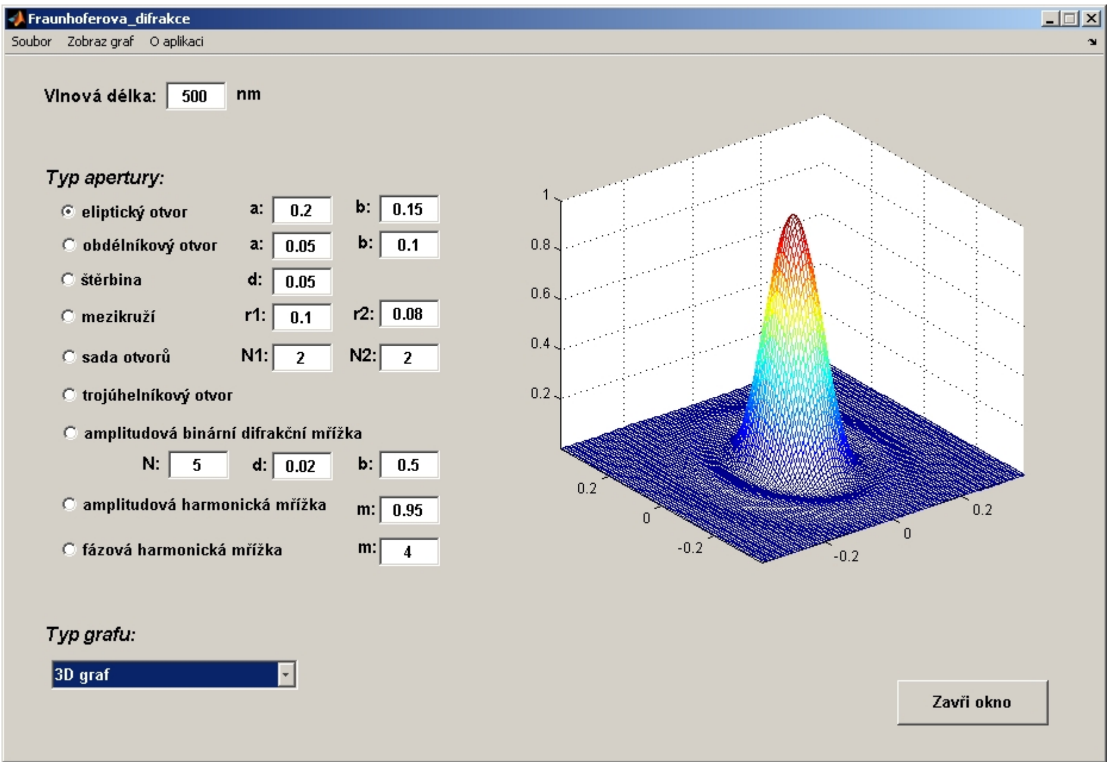
Vidíme, že v rámci platnosti Fraunhoferovy aproximace je pole $U(P)$ úměrné Fourierově transformaci pole v otvoru stínítka a pro výpočet lze s výhodou použít algoritmus rychlé Fourierovy transformace.

4 Výukový software pro počítačovou simulaci a analýzu difrakčních jevů

V rámci této práce byl vytvořen software, který umožňuje jednoduchým způsobem provádět matematické modelování vybraných difrakčních jevů, zejména pak případu Fresnelovy a Fraunhoferovy difrakce na různých typech apertur.



Obr.2: Profily rozdělení intenzity ve směru os X a Y při difrakci na eliptickém otvoru

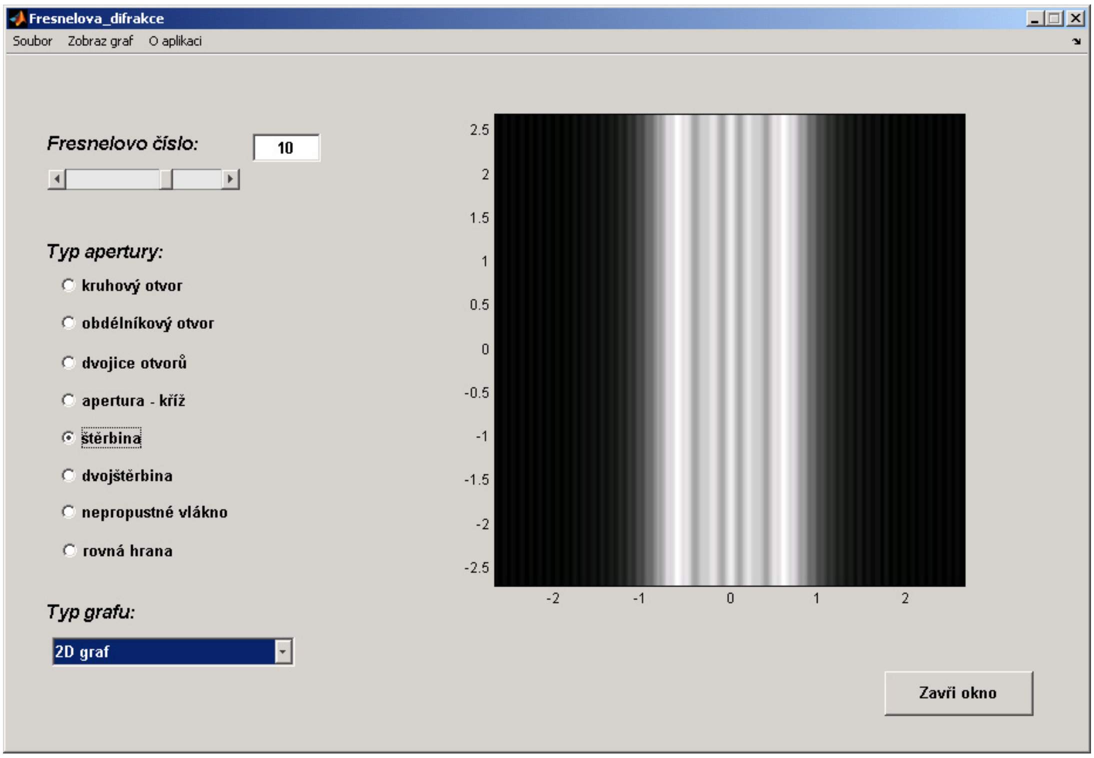


Obr.3: 3D graf rozdělení intenzity při difrakci na eliptickém otvoru

Software umožňuje počítačově simulovat difrakci světla na různých typech otvorů ve stínítku, mřížkách, na rovné hraně, apod. Získané výsledky lze případně porovnat s experimenty v laboratoři.

Pro Fraunhoferovu difrakci byly jako ilustrativní příklady vybrány následující apertury, mezi které je možno jednoduše volit: eliptický otvor, obdélníkový otvor, jednoduchá štěrbina, mezikruží, sada obdélníkových otvorů, trojúhelníkový otvor, amplitudová binární difrakční mřížka, amplitudová a fázová harmonická mřížka. V programu je možno zadávat vlnovou délku, rozměry a počet jednotlivých apertur. Pro každý modelovaný případ se dají zobrazit 4 typy grafů: tvar apertury, 1D profily rozdělení intenzity (obr.2), 2D graf intenzity a 3D graf intenzity (obr.3).

V případě Fresnelovy difrakce byly jako příklady vybrány následující apertury, mezi kterými je možno jednoduše volit: kruhový otvor, obdélníkový otvor, dvojice obdélníkových otvorů, apertura ve tvaru kříže, štěrbina a dvojštěrbina. Dále je též možno počítačově simulovat Fresnelovu difrakci na nepropustném tenkém vlákně (drátu) resp. na rovné hraně. V programu je možno zadávat pomocí posuvného jezdce Fresnelovo číslo N_F v rozmezí 0,005-500 a sledovat vliv jeho hodnoty na tvar difrakčního obrazce (rozdělení intenzity). Pro každý případ zvolené apertury se dají opět zobrazit 4 typy grafů: tvar apertury, 1D profil rozdělení intenzity, 2D graf intenzity (**obr.4**) a 3D graf intenzity.



Obr.4: 2D graf rozdělení intenzity v případě Fresnelovy difrakce na štěrbině ($N_F = 10$)

Vytvořené počítačové programy lze využít pro názornou vizualizaci difrakčních jevů, které nastávají na různých tvarech apertur. Studenti tak mají možnost sledovat jak tvar a rozměry apertury resp. vzdálenost roviny pozorování ovlivňují výsledné rozdělení intenzity při difrakci světla. Pomocí MATLABU byla vytvořena též aplikace, která umožňuje počítačovou simulaci a analýzu vlivu difrakce a parametrů optických soustav na kvalitu zobrazení či rozlišovací schopnost optických soustav.

5 Závěr

V práci byl s využitím prostředků výpočetního systému MATLAB vytvořen výukový software pro počítačovou simulaci a analýzu základních difrakčních jevů v optice. Počítačové programy umožňují velmi jednoduchou a názornou vizualizaci vybraných případů Fraunhoferovy a Fresnelovy difrakce světla na aperturách s různým tvarem a rozměry. Uvedené aplikace mohou tak sloužit jako vhodný doplněk výuky fyziky a aplikované optiky. S použitím počítačových aplikací mohou studenti modelovat difrakční proces na různých typech apertur a struktur a vyšetřovat vliv difrakce na kvalitu zobrazení či rozlišovací schopnost optických soustav.

Práce byla vypracována v rámci projektu MSM6840770022 Ministerstva školství ČR.

Literatura

[1] Mikš A.: *Aplikovaná optika 10*, Vydavatelství ČVUT, Praha 2000.
[2] Born M. -Wolf E.: *Principles of optics*, Pergamon Press, NewYork 1964.
[3] Novák, J. - Pultarová, I. - Novák, P.: *Základy informatiky - počítačové modelování v Matlabu*. Vydavatelství ČVUT, Praha 2005.
[4] Novák, J. - Novák, P.: *Computer Modelling in Physics Using Matlab.* Proceedings of International Workshop: Physical and Material Engineering 2005. Praha: Czech Technical University in Prague, 2005, s. 136-138.
[5] Mikš, A. - Novák, J.: *Education of Optics with Matlab*. Proceedings of SPIE Vol.5259, Washington: SPIE, 2003, s. 260-266.
[6] Novák, J. - Novák, P.: *Počítačové simulace ve výuce fyziky s užitím Matlabu*. Technical Computing Prague 2005: 13th Annual Conference Proceedings. Praha: VŠCHT, 2005.
[7] Mikš, A. - Novák, J.: *Method for Fast Numerical Calculation of Diffraction Integrals*. Proceedings of the International Conference Mathematical and Computer Modelling in Science and Engineering. Prague: CTU, 2003, s. 245-249
[8] Mikš, A. - Novák, J.: *Simulace difrakčních jevů s použitím Matlabu.* Matlab 2000. Praha : Vysoká škola chemicko-technologická, 2000, s. 245-254.

Ing. Jiří Novák, PhD., Katedra fyziky, Fakulta stavební ČVUT v Praze, Thákurova 7, 166 29 Praha 6.
tel: 224354345, fax: 233333226, e-mail: novakji@fsv.cvut.cz

Ing. Pavel Novák, Katedra fyziky, Fakulta stavební ČVUT v Praze, Thákurova 7, 166 29 Praha 6.
tel: 224354345, fax: 233333226, e-mail: xnovakp9@fsv.cvut.cz