

# DYNAMICKÝ MODEL A SIMULACE CHOVÁNÍ MOBILNÍHO ROBOTU

F. Dušek, D. Honc, J. Kotyk

Katedra řízení procesů, Fakulta elektrotechniky a informatiky, Univerzita Pardubice

## Abstract

Paper deals with dynamic mathematical model of an ideal differentially steered drive system (mobile robot) planar motion. The aim is to create model that describes trajectory of a robot's arbitrary point. The trajectory depends on supply voltage of both drive motors. Selected point trajectory recomputation to trajectories of wheels contact points with plane of motion is a part of the model, too. The dynamic behaviour of engines and chassis, form of coupling between engines and wheels and basic geometric dimensions are taken into account. The dynamic model will be used for design and verification of a robot's motion control in MATLAB / SIMULINK simulation environment.

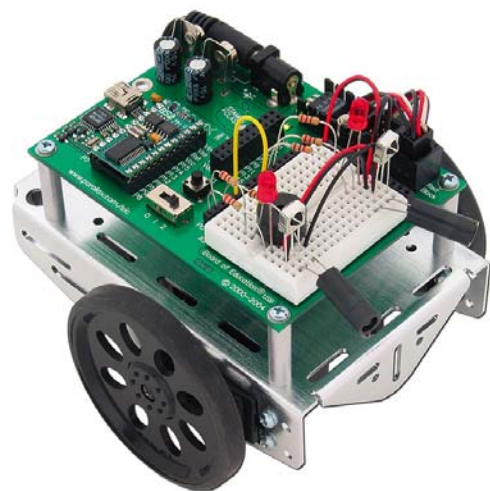
## Abstrakt

Článek se zabývá dynamickým matematickým modelem pohybu diferencially řízeného robotu v rovině. Cílem je vytvořit model popisující pohyb vybraného bodu robotu v závislosti na napájecím napětí obou motorů. Součástí modelu je i přepočítání pohybu vybraného bodu na dráhu bodů kontaktů kol s rovinou pohybu. Model zahrnuje dynamické chování motorů a podvozku včetně vzájemného ovlivňování a respektování základních geometrických rozměrů. Model je určen pro návrh řízení pohybu robotu a jeho verifikaci v prostředí MATLAB/SIMULINK.

## 1 Úvod

Článek se zabývá sestavením matematického popisu dynamického chování ideálního mobilního robotu s nezávislým pohonem dvou kol (*differentially steered drive system*) při rovinném pohybu. Cílem je sestavit matematický model popisující trajektorii rovinného pohybu vybraného bodu robotu v závislosti na napájecím napětí obou pohonů. Součástí modelu bude i přepočítání trajektorie vybraného bodu na trajektorie bodů odpovídajících stykům kol s rovinou pohybu robotu. Model bude respektovat dynamické chování motoru i podvozku, způsob propojení pohonu s koly podvozku i základní geometrické poměry (poloha těžiště vůči kolům). Model bude využit pro návrh a ověření řízení pohybu v simulačním prostředí MATLAB / SIMULINK. Článek vychází z publikace [1], kterou rozšiřuje zejména v oblasti simulace statického a dynamického chování modelu.

V případě malých mobilních robotů se nejčastěji používá podvozek pásový nebo jednonápravový se samostatným pohonem obou kol. V případě jednonápravového podvozku bývá tento doplněn o podpůrné kolečko zajišťující stabilitu, které ale v podstatě neomezuje pohyblivost podvozku. Takovéto řešení, na rozdíl od klasického podvozku, dovoluje při samostatném ovládní pohonů obou kol vynikající pohyblivost zařízení včetně třeba otáčení na místě. Jednonápravový podvozek s podpůrným kolečkem má např. i komerčně dostupný diferencially řízený mobilní robot na Obrázku 1 určený pro výukové účely. Dále odvozený spojitý dynamický matematický model vychází z uspořádání, příbližných geometrických rozměrů a dalších vlastností tohoto mobilního robotu za předpokladu ideálního chování jednotlivých komponent a dalších zjednodušujících předpokladů.



Obrázek 1: Reálný diferencially řízený robot

Cílem je sestavení nejjednoduššího dynamického modelu popisujícího pohyb ideálního diferenciálně řízeného robotu, který vychází z působení sil vyvolaných momenty motorů samostatně pohánějících obě kola dvoukolového podvozku. Model bude respektovat dynamické chování ideálního sériově zapojeného stejnosměrného elektromotoru, dynamiku podvozku při křivočarém pohybu.

Tento model pohybu robotu, vycházející z dynamiky hmotného bodu je odlišný od modelů pohybu robotu standardně používaných v této oblasti (viz např. [2], [3]), které vychází z kinematiky hmotného bodu. Standardní model pohybu robotu je obvykle tvořen rovnicemi popisujícími dráhu – časový vývoj polohy (trajektorii) vybraného bodu v závislosti na známé rychlosti kol, provedení a geometrii podvozku. Tento model je využíván k určení polohy robotu na základě signálů senzorů otáček kol (odometrie [4], [5]). V článku uvedený model tento standardní model doplňuje o dynamickou část popisující závislost rychlosti kol na napájecím napětí hnacích motorů při respektování dynamiky, provedení, geometrických a dalších parametrů podvozku a motorů.

Základem pro odvození dynamického modelu pohybu robotu je fakt, že přivedením napájecího napětí na motor pohánějící kolo vzniká hnací moment, který vyvolá otáčení kola a ve výsledku rovinný křivočarý pohyb podvozku. Rovinný křivočarý pohyb lze obecně rozložit na součet pohybu posuvného (translačního) a pohybu otáčivého (rotaci). Tyto dvě pohybové rovnice pro vybraný bod podvozku pak jednoznačně určují i pohyb kteréhokoliv jiného bodu podvozku. Při sestavování pohybových rovnic se vychází z bilance sil souvisejících s křivočarým pohybem. Je-li  $F$  okamžitá síla působící na hmotný bod o hmotnosti  $m$  v okamžité vzdálenosti  $r$  od osy otáčení při obecném křivočarém pohybu, pak podmínku, že vektorový součet všech sil působících na vybraný bod je nulový, lze zapsat jako (blíže viz např. literatura [6])

$$\vec{F} + \underbrace{m \frac{d\vec{v}}{dt}}_{\text{síla setrvačná}} + \underbrace{m \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times r}_{\text{síla Eulerova}} + \underbrace{2m\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}}_{\text{síla Coriolisova}} + \underbrace{m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}_{\text{síla odstředivá}} = 0 \quad (1)$$

kde  $v$  je okamžitá posuvná rychlost a  
 $\omega$  je okamžitá úhlová rychlost

Aplikace této obecné rovnice pro konkrétní případ vyžaduje konkretizovat jednotlivé síly podle aktuálních podmínek (provedení a vlastnosti podvozku, propojení motorů s hnacími koly, působení dvojice sil od hnacích kol) a případně doplnit další působící síly. Kromě sil vznikajících při křivočarém pohybu budeme ještě uvažovat síly vznikající při pohybu reálného tělesa – síly odporu (ztráty). Tyto síly budeme aproximovat nejjednodušším předpokladem, že jsou úměrné rychlosti pohybu. Výsledkem dynamické části budou pohybové rovnice popisující okamžitou posuvnou a úhlovou rychlost vybraného bodu podvozku závislé na okamžitém napětí motorů hnacích kol.

Volba bodu, pro který bude určována okamžitá posuvná i úhlová rychlost, významně ovlivňuje sestavení výchozích rovnic a tedy i složitost výsledného modelu. Pokud se za sledovaný bod zvolí poloha těžiště robotu, pak jsou výchozí rovnice dynamické části formálně nejjednodušší. Avšak rovnice popisující závislost mezi rychlostmi kol a posuvnou a otáčivou rychlostí těžiště jsou složité. V běžné literatuře věnované odometrii se jako sledovaný bod podvozku používá střed spojnice mezi hnacími koly. Tato volba vede na nejjednodušší přepočty okamžitých rychlostí hnacích kol na pohybové rovnice daného bodu a nejjednodušší výpočet dráhy tohoto i ostatních bodů podvozku. V tomto článku je zvolen kompromis mezi těmito volbami – bod odpovídající kolmému průmětu polohy těžiště na spojnici mezi hnacími koly. Tato volba sice vede na složitější rovnici dynamiky rotační složky pohybu ale rovnice popisující souvislost mezi rychlostmi hnacích kol a rychlostí zvoleného bodu zůstávají relativně jednoduché.

Na pohybové rovnice popisující dynamiku pohybu zvoleného bodu podvozku (dynamická část modelu) v závislosti na napájecím napětí motorů navazuje část věnovaná výpočtu trajektorie (časový vývoj polohy) dalších bodů podvozku – bodů styku kol s podložkou.

## 2 Matematický model

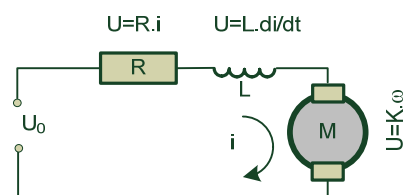
Sestavení matematického modelu vychází z uspořádání podvozku robotu. Popisovaný mobilní robot je poháněn dvěma stejnými stejnosměrnými elektromotory se společným zdrojem napájení, ale s možností nezávislého ovládní napájení každého motoru (diferenciálně řízený robot). Rotory motorů jsou napojeny na hnací kola podvozku prostřednictvím ideální převodovky s konstantním převodovým

poměrem. Pod pojmem ideální převodovka je myšleno, že v příslušném poměru lineárně redukuje výstupní úhlovou rychlost a zesiluje výstupní moment. Nelineární chování reálné převodovky (vůle v zubech, statické tření) se neuvažuje. Ztráty v převodovce i motoru jsou aproximovány uvažováním odporu úměrného otáčkám motoru. Podvozek je dále kromě dvou hnacích kol vybaven stabilizačním kolečkem, které neovlivňuje přímo pohyb podvozku. Jeho vliv je zahrnut do koeficientů ovlivňujících odpor při posuvném a otáčivém pohybu podvozku.

Základní popis pohybu mobilního robotu je tvořen třemi relativně samostatnými částmi. Zjednodušenému popisu chování ideálního stejnosměrného motoru v sériovém zapojení je věnována první část této kapitoly. Model motoru představují rovnice popisující závislost rychlosti otáčení rotoru a proudu na napájecím napětí a zátěžovém momentu souvisejícím s dynamikou podvozku. Popis dynamiky podvozku je obsahem druhé části. Je tvořen pohybovými rovnicemi, které popisují závislost posuvné a otáčivé rychlosti vybraného bodu na momentech působících na hnací kola. Třetí část se zabývá nalezením rovnic popisujících závislost mezi posuvnou a otáčivou rychlostí vybraného bodu a otáčkami motorů a sestavením celkového modelu. Poslední část této kapitoly se zabývá převedením modelu do výpočetně jednoduššího tvaru vhodného pro další použití a určením vztahů pro výpočet trajektorie bodů odpovídajících bodům kontaktů obou hnacích kol a pomocného stabilizačního kolečka s pojezdovou rovinou.

## 2.1 Dynamika stejnosměrného motoru v sériovém zapojení

Základní náhradní zapojení ideálního stejnosměrného motoru v sériovém zapojení na Obrázku 2 je tvořeno odporem  $R$ , indukčností  $L$  a magnetickým polem motoru  $M$ . Při rotaci rotoru v magnetickém poli vzniká elektrické napětí o opačné polaritě než napětí způsobující rotaci motoru – elektromotorické napětí  $U_M$ , které je přímo úměrné úhlové rychlosti rotoru  $\omega_x$ . Kroučící moment rotoru  $M_M$  je přímo úměrný procházejícímu proudu  $i_x$ . Na Obrázku 2 je zapojení motoru se zdrojem o konstantním napětí  $U_0$ . Ideální chování spočívá v tom, že veškerá elektrická energie spotřebovaná na vytvoření elektromagnetického pole je beze ztrát převedena na mechanickou energii – moment motoru. V energetické bilanci motoru se tedy neuvažují ztráty v magnetickém poli, uvažují pouze elektrické ztráty ve vinutí a jen jeden typ mechanických ztrát – mechanické ztráty úměrné otáčkám rotoru.



Obrázek 2: Náhradní zapojení elektromotoru

První rovnice popisující chování motoru vychází z bilance napětí (Kirchofovy zákony)

$$U_R + U_L = U_0 - U_M \Leftrightarrow Ri + L \frac{di}{dt} = U_0 - K\omega \quad [\text{V}] \quad (2)$$

kde	$R$	$[\Omega]$	je odpor vinutí motoru,
	$L$	$[\text{H}]$	je indukčnost motoru,
	$K$	$[\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-1}]$	je elektromotorická konstanta,
	$U_0$	$[\text{V}]$	je napětí zdroje,
	$\omega$	$[\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}]$	je úhlová rychlost rotoru a
	$i$	$[\text{A}]$	je proud protékající vinutím

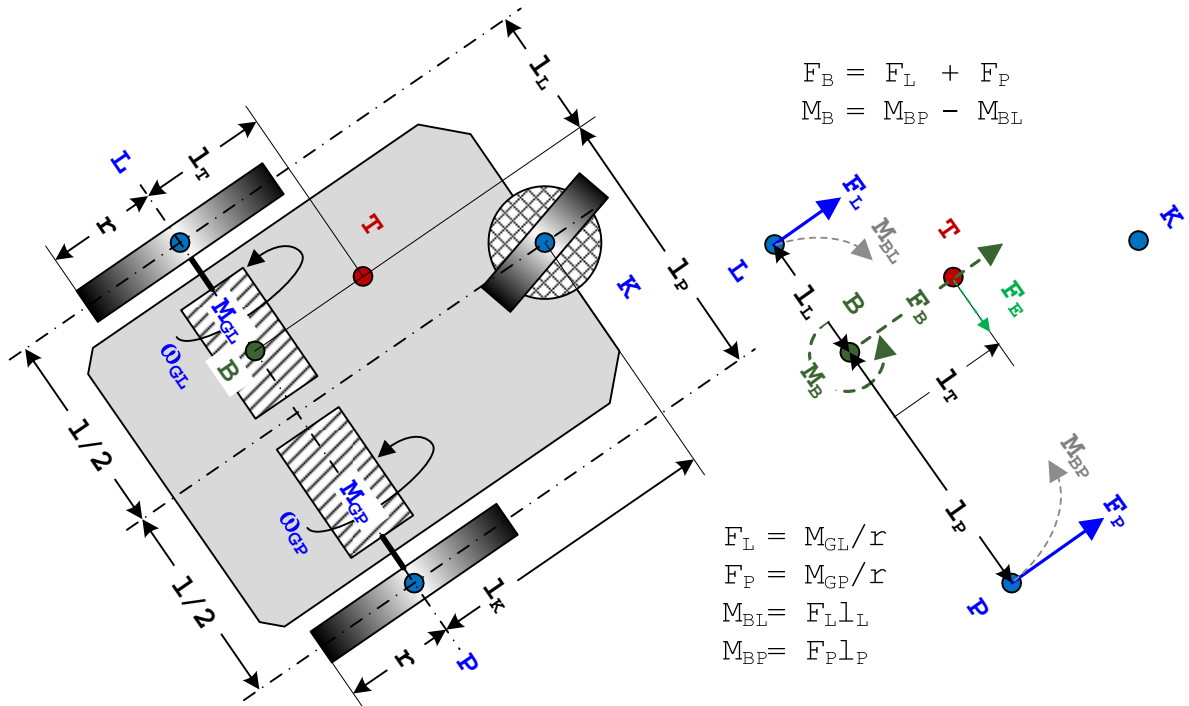
Druhá rovnice je bilancí momentů (mechanické energie) tj. momentu setrvačnosti rotoru  $M_s$ , odporu rotace (mechanické ztráty)  $M_o$  úměrného otáčkám, zátěžového momentu motoru  $M_x$  a momentu  $M_M$  vyvolaném magnetickým polem, který je úměrný protékajícímu proudu

$$M_s + M_o + M_x = M_M \Leftrightarrow J \frac{d\omega}{dt} + k_r \omega + M_x = Ki \quad [\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}] \quad (3)$$

kde	$K$	$[\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-1}]$	je elektromotorická konstanta,
	$J$	$[\text{kg} \cdot \text{m}^2]$	je moment setrvačnosti rotoru,
	$k_r$	$[\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}]$	je koeficient rotačního odporu a
	$M_x$	$[\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}]$	je zátěž motoru (zátěžový moment)

## 2.2 Dynamika podvozku

Dynamika podvozku je popsána vektorem posuvné rychlosti  $v_B$  působícího ve zvoleném bodě podvozku a rotací tohoto vektoru s úhlovou rychlostí  $\omega_B$ . Na základě těchto veličin lze dopočítat trajektorii libovolného bodu podvozku. Bod **B**, pro který jsou sestaveny pohybové rovnice, byl zvolen jako kolmý průmět těžiště **T** na spojnicí hnacích kol. Situace je znázorněna na Obrázku 3. Tato volba podle názoru autorů vede na nejjednodušší systém rovnic tvořících celkový model pohybu robotu. Je uvažována obecná poloha těžiště robotu, tj. že těžiště **T** neleží na středu mezi hnacími koly.



Obrázek 3: Schéma podvozku a působící síly

Výchozí rovnice – bilance sil působících na podvozek – vychází z předpokladu, že dvě síly  $F_L$  a  $F_P$  působící na podvozek v místech kontaktu levého (**L**) a pravého (**P**) kola s rovinou pojezdu lze nahradit silou  $F_B$  a kroutícím momentem  $M_B$  působícími v bodě **B** (osa otáčení je kolmá na rovinu pojezdu). Situace je znázorněna na Obrázku 3, kde je také zobrazeno uspořádání podvozku, tj. obě síly vždy působí rovnoběžně. Vliv stabilizačního kola **K** bude zahrnut do odporu posuvného pohybu a odporu rotačního pohybu. Vozík je charakterizován poloměrem hnacích kol  $r$ , celkovou hmotností  $m$ , momentem setrvačnosti  $J_T$  vzhledem k těžišti a polohou těžiště určenou parametry  $l_T$ ,  $l_L$ ,  $l_P$ .

Síla  $F_x$  působící v bodě styku kola **X** s podložkou přímo závisí na výstupním momentu převodovky příslušného pohonu  $M_{Gx}$  a nepřímo na poloměru kola tj.  $F_x = M_{Gx}/r$ . Moment  $M_{Bx}$ , kterým působí kolo **X** na otáčení podvozku v bodě **B**, závisí na působící síle  $F_{Gx}$  a na rameni působící síly  $l_x$  tj.  $M_{Bx} = F_{Gx} l_x$ . Připomínáme, že momenty  $M_{Gx}$  obou hnacích kol vyvolané motory působí v rovině kolmé na rovinu pohybu robotu a oba momenty  $M_{Bx}$  způsobující otáčení podvozku působí v rovině pohybu robotu. Vzhledem ke konstrukci zařízení jsou působící síly  $F_L$ ,  $F_P$  vždy rovnoběžné a jimi vyvolané momenty  $M_{BL}$ ,  $M_{BP}$  působí vždy proti sobě.

Pro sestavení pohybových rovnic vyjdeme z rovnice (1), kterou konkretizujeme pro náš případ. Poloha těžiště se vůči vybranému bodu nemění (nedochází k pohybu těžiště vůči ose otáčení), takže není potřeba brát do úvahy sílu Coriolisovu. Také není potřeba uvažovat sílu odstředivou, protože její vliv se nemůže projevit – uvažujeme podvozek jako tuhé těleso nahrazené hmotným bodem (těžištěm). Protože vektor síly vyvolávající posuvný pohyb působí v bodě **B** a jeho směr prochází těžištěm, stačí při posuvném pohybu uvažovat jen sílu setrvačnou. Při rotačním pohybu je potřeba uvažovat moment vyvolaný Eulerovou silou, která vzniká v důsledku toho, že osa otáčení neprochází těžištěm. Pokud bychom uvažovali pouze hmotný bod, pak další síly v důsledku křivočarého pohybu nepůsobí – hmotný bod nemá žádný vlastní moment setrvačnosti. Ve skutečnosti těžištěm nahrazujeme celé tuhé těleso, které má při rotaci kolem osy kolmé na rovinu pojezdu a umístěné v těžišti moment setrvačnosti  $J_T$ .

Moment setrvačnosti vzniká jako integrální součet Eulerových sil působících na každý bod tělesa  $J = \iiint_V \rho r^2 dV$  vzhledem k příslušné ose otáčení.

Při bilanci sil působících posuvný pohyb budeme kromě síly setrvačné  $F_S$  také uvažovat sílu odporu  $F_O$  posuvného pohybu úměrnou posuvné rychlosti  $v_B$ . Potom je možné zapsat rovnováhu sil ovlivňujících posuvnou rychlost jako

$$F_L + F_P + F_O + F_S = 0 \Leftrightarrow \frac{M_{GL}}{r} + \frac{M_{GP}}{r} - k_v v_B - m \frac{dv_B}{dt} = 0 \quad [\text{kg.m.s}^{-2}] \quad (4)$$

kde	$m$	[kg]	je hmotnost robotu,
	$k_v$	[kg.s <sup>-1</sup> ]	je koeficient odporu posunu,
	$M_{GL}$	[kg.m <sup>2</sup> .s <sup>-2</sup> ]	je moment levého pohonu,
	$M_{GP}$	[kg.m <sup>2</sup> .s <sup>-2</sup> ]	je moment pravého pohonu,
	$v_B$	[m.s <sup>-1</sup> ]	je posuvná rychlost a
	$r$	[m]	je poloměr hnacích kol

Sestavení bilance momentů je komplikováno volbou osy otáčení jinde než v těžišti. Proto je potřeba brát do úvahy kromě setrvačného momentu tělesa  $M_S$  ještě moment  $M_E = l_T F_E$  vyvolaný Eulerovou silou  $F_E$ . Tato síla vzniká pouze při rotačním zrychlení a umístění hmoty mimo osu rotace. Dále budeme stejně jako u posuvného pohybu uvažovat moment  $M_O$  vyvolaný odporem při rotaci úměrný rychlosti rotace  $\omega_B$ .

$$\begin{aligned} M_{BL} + M_{BP} + M_O + M_S + M_E &= 0 \\ -\frac{M_{GL}}{r} l_L + \frac{M_{GP}}{r} l_P - k_\omega \omega_B - J_T \frac{d\omega_B}{dt} - l_T m \frac{dv_B}{dt} l_T &= 0 \end{aligned} \quad [\text{kg.m}^2.\text{s}^{-2}] \quad (5)$$

kde	$l_P$	[m]	je vzdálenost pravého kola od bodu B,
	$l_L$	[m]	je vzdálenost levého kola od bodu B,
	$l_T$	[m]	je vzdálenost těžiště od bodu B,
	$k_\omega$	[kg.m <sup>2</sup> .s <sup>-1</sup> ]	je koeficient odporu otáčení podvozku,
	$J_T$	[kg.m <sup>2</sup> ]	je moment setrvačnosti vzhledem k ose v těžišti s
	$\omega_B$	[s <sup>-1</sup> ]	je úhlová rychlost otáčení v bodě B

Výsledný moment setrvačnosti  $J_B$  vzhledem k ose otáčení v bodě **B** je dán vztahem (6) což je Steinerova věta (viz např. [5]) o určení momentu setrvačnosti vzhledem k jiné ose.

$$J_B = J_T + ml_T^2 \quad [\text{kg.m}^2] \quad (6)$$

kde	$J_T$	[kg.m <sup>2</sup> ]	je moment setrvačnosti vzhledem k těžišti a
	$l_T$	[m]	je vzdálenost těžiště od bodu B

### 2.3 Souvislost mezi otáčkami motorů a pohybem těžiště podvozku (kinematika)

Dosud uvedené rovnice popisující chování obou motorů (proudy a úhlové rychlosti) a chování podvozku (rychlost posuvného pohybu a rychlosti otáčení) jsou spolu propojeny pouze přes momenty motorů. Rovnice sice zaručují dodržení zákona zachování energie tj. přeměnu elektrické energie na mechanickou včetně uvažování jednoho typu ztrát, ale představují pouze volnou vazbu mezi otáčkami obou motorů (obvodovou rychlostí hnacích kol) a rychlostí pohybu a otáčení podvozku. Přitom tato vazba je pevně dána konstrukčním řešením pohonu a podvozku. Předpokládáme, že obě hnací kola jsou přes ideální převodovku o převodovém poměru  $p_G$  pevně propojena s rotory příslušných motorů tj. bez nelinearit a případných pružných členů. Převodovka sníží výstupní úhlovou rychlost  $\omega_{Gx}$  vzhledem ke vstupní úhlové rychlosti  $\omega_x$  podle převodového poměru  $p_G$  a zároveň ve stejném poměru zvýší výstupní moment  $M_{Gx}$  vzhledem ke vstupnímu momentu  $M_x$

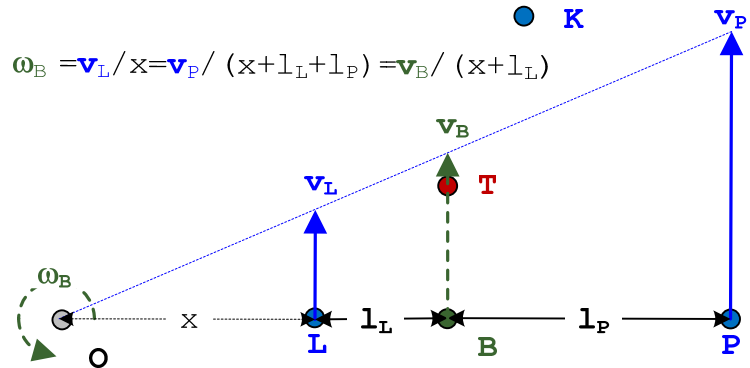
$$\omega_{GL} = \frac{\omega_L}{p_G}, \quad \omega_{GP} = \frac{\omega_P}{p_G} \quad (7a)$$

$$M_{GL} = p_G M_L, \quad M_{GP} = p_G M_P \quad (7b)$$

Dále předpokládáme, že obě hnací kola mají stejný poloměr  $r$  a jejich obvodové rychlosti  $v_L, v_P$  závisí na úhlových rychlostech výstupu převodovky pohonu  $\omega_{GL}, \omega_{GP}$  podle vztahu

$$v_L = r\omega_{GL} = r \frac{\omega_L}{p_G}, \quad v_P = r\omega_{GP} = r \frac{\omega_P}{p_G} \quad (7c)$$

Pro určení hodnoty posuvné rychlosti v bodě **B** a úhlové rychlosti otáčení vyjdeme z Obrázku 4. Předpokládáme, že obě hnací kola mají stejnou osu otáčení a tudíž jejich obvodové rychlosti jsou vždy rovnoběžné. Na obrázku je znázorněno vzájemné umístění míst, kde skutečně působí obvodové rychlosti  $v_L$  a  $v_P$  (hnací kola **L** a **P**) a bodu **B**, kde chceme určit takovou posuvnou  $v_B$  a úhlovou  $\omega_B$  rychlost, které budou mít stejný účinek jako působení obvodových rychlostí hnacích kol.



Obrázek 4: Působení obvodových rychlostí

S využitím podobnosti trojúhelníků podle Obrázku 4 můžeme přepočítat obvodové rychlost kol  $v_L, v_P$  na rychlost  $v_B$  v bodě **B** podle vztahu (8a) a na úhlovou rychlost otáčení  $\omega_B$  podle vztahu (8b)

$$v_B = \frac{v_L l_P + v_P l_L}{l_L + l_P} = \frac{l_P}{l_L + l_P} \frac{r}{p_G} \omega_L + \frac{l_L}{l_L + l_P} \frac{r}{p_G} \omega_P \quad [\text{m.s}^{-1}] \quad (8a)$$

$$\omega_B = \frac{v_B}{x + l_L} = \frac{v_P - v_L}{l_L + l_P} = \frac{r}{p_G} \frac{\omega_P - \omega_L}{l_L + l_P} \quad [\text{rad.s}^{-1}] \quad (8b)$$

## 2.4 Výpočet trajektorie vybraných bodů podvozku

Z pohybových rovnic vybraného bodu tj. posuvné rychlosti  $v_B$  a úhlové rychlosti otáčení  $\omega_B$  lze určit aktuální úhel  $\alpha$  natočení podvozku a aktuální polohu (souřadnice  $x_B, y_B$ ) bodu **B** podle vztahů

$$\frac{d\alpha}{dt} = \omega_B \quad [\text{rad.s}^{-1}] \quad (9a)$$

$$\frac{dx_B}{dt} = v_B \cos(\alpha) \quad [\text{m.s}^{-1}] \quad (9b)$$

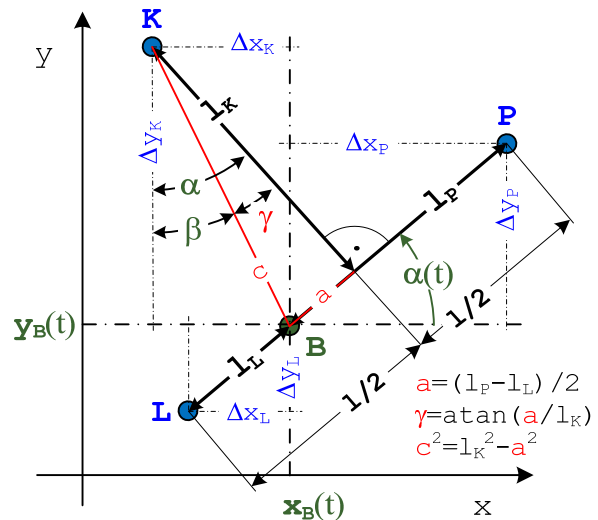
$$\frac{dy_B}{dt} = v_B \sin(\alpha) \quad [\text{m.s}^{-1}] \quad (9c)$$

Pro určení aktuální polohy odpovídajících stykům všech tří kol (body **L**, **P** a **K**) podvozku s pojezdovou rovinou je potřeba znát umístění těchto bodů. Toto umístění je znázorněno na Obrázku 5. Z geometrických rozměrů určíme rovnice popisující relativní polohu těchto bodů vzhledem k bodu **B** v závislosti na úhlu natočení.

Relativní polohy  $\Delta x_L, \Delta y_L$  bodu **L** a  $\Delta x_P, \Delta y_P$  bodu **P** v závislosti na úhlu natočení  $\alpha$  jsou dány rovnicemi

$$\Delta x_L = -l_L \sin(\alpha), \quad \Delta y_L = -l_L \cos(\alpha) \quad (10a)$$

$$\Delta x_P = +l_P \sin(\alpha), \quad \Delta y_P = +l_P \cos(\alpha) \quad (10b)$$



Obrázek 5: Polohy dalších bodů podvozku



Pro určení relativní polohy  $\Delta x_K, \Delta y_K$  bodu **K** se využije pomocný pravouhlý trojúhelník určený odvěsnou  $c$  a přeponami  $a, l_K$  (viz Obrázek 5). Potom rovnice výpočtu relativních souřadnic bodu **K** jsou

$$a = \frac{1}{2}(l_P - l_L), \quad \gamma = \arctan\left(\frac{a}{l_K}\right), \quad c = \sqrt{a^2 + l_K^2} \quad (10c)$$

$$\Delta x_K = -c \sin(\alpha - \gamma), \quad \Delta y_K = c \cos(\alpha - \gamma)$$

## 2.5 Celkový model a ustálený stav

Celkový model je tvořen šesti lineárními diferenciálními rovnicemi pro osm stavových veličin jednoznačně popisujících chování levého (proud  $i_L$ , úhlová rychlost rotoru  $\omega_L$ , zátěžový moment  $M_L$ ) a pravého motoru (proud  $i_P$ , úhlová rychlost rotoru  $\omega_P$ , zátěžový moment  $M_P$ ), chování podvozku (posuvná rychlost  $v_B$ , úhlová rychlost otáčení  $\omega_B$ , hnací momenty  $M_L$  a  $M_P$ ) a čtyřmi algebraickými rovnicemi popisujícími mechanickou vazbu mezi otáčkami obou motorů ( $\omega_L, \omega_P$ ) a pohybem podvozku ( $v_B, \omega_B$ ). Všechny stavové veličiny jsou závislé na časových průbězích napájecího napětí levého  $U_L$  a pravého  $U_P$  motoru. Souřadnice polohy bodu **B** podvozku ( $x_B, y_B$ ) a úhel natočení  $\alpha$  jsou popsány pomocí tří dalších diferenciálních rovnic závislých pouze na průběhu posuvné rychlosti  $v_B$  a úhlové rychlosti  $\omega_B$ .

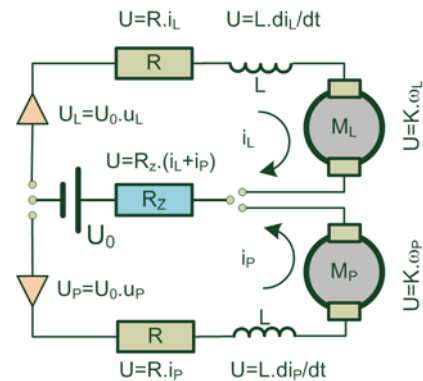
Každý motor má vlastní ovládané napájecí napětí ( $U_L, U_P$ ) odvětvené ze společného zdroje o napětí  $U_0$ . Pro jednoduchost je znázorněno na Obrázku 6 ovládaní napájecího napětí obou motorů pomocí zesilovače s řídicím signálem  $u_x$ . Protože oba motory jsou napájeny ze společného neideálního zdroje, bude dále uvažován také vliv vnitřního odporu zdroje  $R_z$ . Oba motory jsou uvažovány se stejnými parametry. Potom podle Obrázku 6 s využitím rovnic (2) a (3) můžeme diferenciální rovnice popisující chování obou motorů zapsat jako

$$Ri_L + R_z(i_L + i_P) + L \frac{di_L}{dt} = u_L U_0 - K\omega_L \quad (11a)$$

$$Ri_P + R_z(i_L + i_P) + L \frac{di_P}{dt} = u_P U_0 - K\omega_P \quad (11b)$$

$$J \frac{d\omega_L}{dt} + k_r \omega_L + M_L = Ki_L \quad (12a)$$

$$J \frac{d\omega_P}{dt} + k_r \omega_P + M_P = Ki_P \quad (12b)$$



Obrázek 6: Zapojení obou motorů

Dynamický model dále doplňují diferenciální rovnice (4) a (5) popisující chování podvozku. Tyto rovnice s respektováním (7b) můžeme přepsat jako

$$\frac{p_G}{r} M_L + \frac{p_G}{r} M_P - k_v v_B - m \frac{dv_B}{dt} = 0 \quad (13a)$$

$$-l_L \frac{p_G}{r} M_L + l_P \frac{p_G}{r} M_P - k_\omega \omega_B - (J_T + ml_T^2) \frac{d\omega_B}{dt} = 0 \quad (13b)$$

Poslední dvě algebraické rovnice (8a) a (8b) popisují vazbu mezi otáčkami rotorů obou motorů a pohybem podvozku

$$v_B = \frac{l_P}{l_L + l_P} \frac{r}{p_G} \omega_L + \frac{l_L}{l_L + l_P} \frac{r}{p_G} \omega_P \quad (14a)$$

$$\omega_B = -\frac{1}{l_L + l_P} \frac{r}{p_G} \omega_L + \frac{1}{l_L + l_P} \frac{r}{p_G} \omega_P \quad (14b)$$

Těchto šest diferenciálních (11a,b), (12a,b), (13a,b) a dvě algebraické rovnice (14a,b) s osmi stavovými veličinami představuje matematický popis dynamického chování ideálního diferenciálně řízeného robota s uvažováním pouze ztrát lineárně závislých na otáčkách či rychlosti. Řídicí signály  $u_L$  a  $u_P$  ovládací napájecí napětí motorů jsou vstupní veličiny a rychlost pohybu  $v_B$  a rychlost otáčení  $\omega_B$

jsou výstupní veličiny umožňující s využitím rovnic (9a) – (9c) určit aktuální souřadnice polohy bodu **B** a úhel natočení podvozku.

Dále je uveden výpočet ustálených hodnot stavových veličin pro konstantní hodnoty napájecích napětí motorů. Výpočet ustáleného stavu je užitečný jednak pro kontrolu odvozených rovnic a jednak pro případné experimentální určování hodnot neznámých parametrů. Protože rovnice (11) – (14) jsou vzhledem ke stavovým veličinám lineární, výpočet ustáleného stavu vede na soustavu osmi lineárních rovnic, kterou je možné zapsat maticově jako

$$\begin{bmatrix} R+R_z & R_z & K & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ R_z & R+R_z & 0 & K & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -K & 0 & k_r & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -K & 0 & k_r & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & rl_p & rl_L & 0 & 0 & -(l_L+l_p)p_G & 0 \\ 0 & 0 & -r & r & 0 & 0 & 0 & -(l_L+l_p)p_G \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_G & p_G & -rk_v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -l_L p_G & l_p p_G & 0 & -rk_\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ i_p \\ \omega_L \\ \omega_p \\ M_L \\ M_p \\ v_B \\ \omega_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_L \\ U_p \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

## 2.6 Výpočetní tvar modelu

Matematický model bude využíván zejména pro návrh a simulační ověření řízení pohybu robota. Model lze rozdělit na tři sériově zapojené části, jak je ukázáno na Obrázku 7. Z pohledu návrhu řízení jsou akčními veličinami řídicí signály  $u_L$  a  $u_p$  ovládající napájecí napětí motorů. Okamžitá rychlost  $v_B$  a rychlost otáčení  $\omega_B$  jsou výstupními veličinami lineární části modelu. Tyto veličiny jsou vstupem do navazující nelineární části modelu, jehož výstupy jsou regulované veličiny – souřadnice  $x_B$ ,  $y_B$  polohy vybraného bodu a úhel  $\alpha$  natočení podvozku. Poslední částí je výpočet souřadnic polohy dalších bodů podvozku

Pro návrh řízení je možné upravit lineární část modelu do jednoduššího tvaru tj. redukovat šest diferenciálních rovnic popisujících závislost mezi vstupy a výstupy na čtyři. Tato redukce je možná díky existenci mechanické (pevné) vazby mezi otáčkami rotorů motorů a pohybem

podvozku. Dosadíme-li rovnice (14a,b), do rovnic (13a,b) vyloučíme momenty  $M_L$  a  $M_p$  pak lze redukovat čtyři rovnice (12a,b) a (13a,b) na dvě diferenciální rovnice (17c,d).

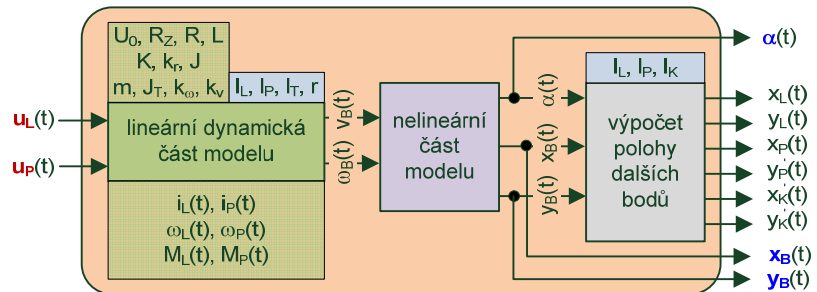
Zavedeme-li přepočtené parametry podle vztahů (16a,b,c,d)

$$a_L = k_r + \frac{k_v l_p}{l_L + l_p} \left( \frac{r}{p_G} \right)^2, \quad a_p = k_r + \frac{k_v l_L}{l_L + l_p} \left( \frac{r}{p_G} \right)^2 \quad (16a)$$

$$b_L = J + \frac{m l_p}{l_L + l_p} \left( \frac{r}{p_G} \right)^2, \quad b_p = J + \frac{m l_L}{l_L + l_p} \left( \frac{r}{p_G} \right)^2 \quad (16b)$$

$$c_L = k_r l_L + \frac{k_\omega}{l_L + l_p} \left( \frac{r}{p_G} \right)^2, \quad c_p = k_r l_p + \frac{k_\omega}{l_L + l_p} \left( \frac{r}{p_G} \right)^2 \quad (16c)$$

$$d_L = J l_L + \frac{J_T + m l_T^2}{l_L + l_p} \left( \frac{r}{p_G} \right)^2, \quad d_p = J l_p + \frac{J_T + m l_T^2}{l_L + l_p} \left( \frac{r}{p_G} \right)^2 \quad (16d)$$



Obrázek 7: Rozdělení modelu na lineární a nelineární část

Obrázek 7: Rozdělení modelu na lineární a nelineární část



pak je redukována část lineárního dynamického modelu tvořena následující soustavou rovnic

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{u_L U_0 - K \omega_L - (R + R_z) i_L - R_z i_P}{L} \quad (17a)$$

$$\frac{di_P}{dt} = \frac{u_P U_0 - K \omega_P - (R + R_z) i_P - R_z i_L}{L} \quad (17b)$$

$$\frac{d\omega_L}{dt} = \frac{d_P [K(i_L + i_P) - a_L \omega_L - a_P \omega_P] - b_P [K(-l_L i_L + l_P i_P) + c_L \omega_L - c_P \omega_P]}{b_L d_P + b_P d_L} \quad (17c)$$

$$\frac{d\omega_P}{dt} = \frac{d_L [K(i_L + i_P) - a_L \omega_L - a_P \omega_P] + b_L [K(-l_L i_L + l_P i_P) + c_L \omega_L - c_P \omega_P]}{b_L d_P + b_P d_L} \quad (17d)$$

a výstupní veličiny jsou určeny algebraickými rovnicemi (14a,b).

Výsledný model závislosti výstupních veličin lineární části modelu na vstupních proměnných je možné přepsat do formy standardního stavového modelu v maticové formě jako

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{Cx} \end{aligned} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} i_L \\ i_P \\ \omega_L \\ \omega_P \end{bmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_L \\ u_P \end{bmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} v_B \\ \omega_B \end{bmatrix} \quad (18a)$$

s konstantními maticemi  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  a  $\mathbf{C}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{R+R_z}{L} & -\frac{R_z}{L} & -\frac{K}{L} & 0 \\ \frac{R_z}{L} & -\frac{R+R_z}{L} & 0 & -\frac{K}{L} \\ \frac{K(d_P - b_P l_L)}{b_L d_P + b_P d_L} & \frac{K(d_P - b_P l_P)}{b_L d_P + b_P d_L} & -\frac{d_P a_L + b_P c_L}{b_L d_P + b_P d_L} & -\frac{d_P a_P + b_P c_P}{b_L d_P + b_P d_L} \\ \frac{K(d_L - b_L l_L)}{b_L d_P + b_P d_L} & \frac{K(d_L + b_L l_P)}{b_L d_P + b_P d_L} & -\frac{d_L a_L - b_L c_L}{b_L d_P + b_P d_L} & -\frac{d_L a_P + b_L c_P}{b_L d_P + b_P d_L} \end{bmatrix} \quad (18b)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{U_0}{L} & 0 \\ 0 & \frac{U_0}{L} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{l_P}{l_L + l_P} & \frac{r}{p_G} & \frac{l_L}{l_L + l_P} & \frac{r}{p_G} \\ 0 & 0 & \frac{1}{l_L + l_P} & \frac{r}{p_G} & \frac{1}{l_L + l_P} & \frac{r}{p_G} \end{bmatrix} \quad (18c)$$

### 3 Příklad chování

Základní ověření výše odvozeného matematického modelu bylo provedeno výpočtem pro situace, kdy lze odhadnout chování reálného zařízení. Nejprve byly provedeny výpočty hodnot stavových veličin v ustálených stavech pro některé kombinace polohy těžiště a vstupních napětí hnacích motorů. Dále byly vypočteny časové průběhy dráhy robotu, proudů a otáček motorů pro některé časové průběhy napájecích napětí obou motorů při rozjezdu z nulové rychlosti.

Ve všech výpočtech, pokud nebude uvedeno jinak, jsou použity hodnoty parametrů uvedené v následujících tabulkách. Uvedené hodnoty jsou zvoleny tak, aby aspoň přibližně odpovídaly hodnotám odhadnutým pro robotu na Obrázku 1. Hodnoty geometrických a dalších parametrů podvozku jsou uvedeny v Tabulce 1. Parametry potřebné pro zjednodušený popis stejnosměrného motoru a měkkého zdroje jsou uvedeny v Tabulce 2. Pro jednoduchost se předpokládá, že oba hnací elektromotory jsou stejné a popsány stejnými hodnotami parametrů.

Tabulka 1: PARAMETRY PODVOZKU

Označení	Hodnota	Rozměr	Význam
$l_L$	0,050	m	vzdálenost levého kola od bodu B
$l_P$	0,050	m	vzdálenost pravého kola od bodu B
$l_T$	0,020	m	vzdálenost těžiště od spojnice hnacích kol
$l_K$	0,040	m	vzdálenost pomocného kola od spojnice hnacích kol
$r$	0,050	m	poloměr hnacího kola
$m$	1,250	kg	celková hmotnost robotu
$k_v$	0,100	kg.s <sup>-1</sup>	koeficient odporu posuvné rychlosti robotu
$J_T$	0,550	kg.m <sup>2</sup>	moment setrvačnosti robotu vzhledem k těžišti
$k_\omega$	1,350	kg.m <sup>2</sup> .s <sup>-1</sup>	koeficient odporu otáčivé rychlosti robotu

Tabulka 2: PARAMETRY ELEKTROMOTORŮ

Označení	Hodnota	Rozměr	Význam
$R$	2,000	$\Omega$	odpor vinutí motoru
$L$	0,050	H	indukčnost motoru
$K$	0,100	kg.m <sup>2</sup> .s <sup>-2</sup> .A <sup>-1</sup>	elektromotorická konstanta
$R_Z$	0,200	$\Omega$	vnitřní odpor zdroje
$U_0$	10,00	V	napětí zdroje
$J$	0,025	kg.m <sup>2</sup>	celkový moment setrvačnosti rotoru a převodovky
$k_r$	0,002	kg.m <sup>2</sup> .s <sup>-1</sup>	koeficient rotačního odporu rotoru a převodovky
$p_G$	25	---	převodový poměr převodovky

### 3.1 Statické chování modelu (ustálený stav)

Výpočet ustálených stavů je užitečný pro základní kontrolu zda výsledky výpočtů z matematického modelu odpovídají představě o reálném chování. Ustálené otáčky motorů (respektive odpovídající posuvná rychlost robotu) a protékající proud při daném napájecím napětí jsou důležité informace pro verifikaci modelu. Základní přízpusobení reálnému chování je možné zejména volbou parametrů ovlivňujících mechanické ztráty jak v motoru a převodovce (celkový koeficient rotačního odporu  $k_r$ ) tak ztráty související s posuvným (koeficient odporu posuvné rychlosti  $k_v$ ) a rotačním (koeficient odporu otáčivé rychlosti  $k_\omega$ ) pohybem robotu. Pomocí ustáleného stavu lze také jednoduše ověřit, zda při symetrickém geometrickém uspořádání, stejných motorech a napájecím napětí je otáčivá složka rychlosti robotu nulová tj. zda „jede robot rovně“. Dále je možné získat představu o vlivu polohy těžiště na chování robotu.

Hodnoty ustálených stavů jsou získány jako řešení soustavy 8 rovnic v maticovém tvaru (15). Pro ilustraci jsou také ukázány dráhy (stopy) kol a těžiště po dobu prvních 20 s pohybu z nulových počátečních podmínek kdy je již skoro dosaženo ustáleného stavu. Dráhy jsou zobrazeny pro výchozí situaci, že počátek soustavy souřadnic je ve středu mezi hnacími koly, která jsou na ose x. Pro snazší orientaci je zobrazeno i výchozí a koncová poloha robotu pomocí trojúhelníku spojujícího všechna tři kola. Je ukázáno pět ustálených stavů pro různé kombinace polohy těžiště a konstantních napájecích napětí motorů. První symetrický stav má ukázat, zda je splněn fakt, že za této situace se má robot pohybovat rovně. Zbývající stavy mají ukázat, jak je chování modelu ovlivněno polohou těžiště.

Ustálený stav A (Tabulka 3a) odpovídá symetrickému geometrickému uspořádání a stejnému napájecímu napětí obou motorů 1 V. Těžiště je v ose symetrie robotu, tj. bod B je uprostřed mezi hnacími koly. Robot se rozjíždí a ujede rovně asi 25 cm s konečnou rychlostí 0,01342 m/s (0,805 m/min). Vypočtená dráha odpovídá předpokladu, že robot se pohybuje pouze přímočaře.

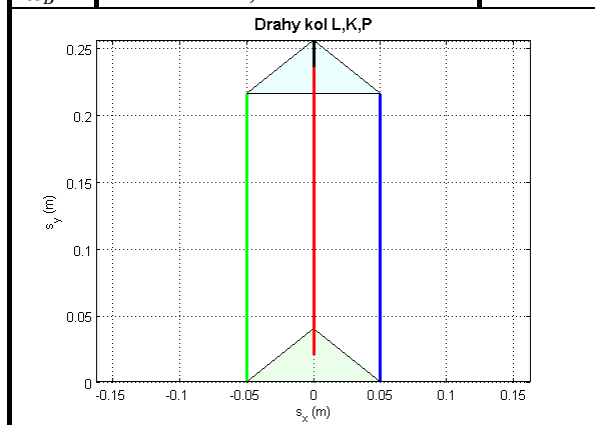
Ustálený stav B (Tabulka 3b) se oproti prvnímu výpočtu liší v tom, že těžiště je posunuto k levému kolu. Je vidět, že se zvýšil zátěžový moment levého a snížil zátěžový moment pravého kola. Ustálený stav se takřka nezmění a robot jen velmi málo zatáčí doleva.

Ustálený stav C (Tabulka 3c) je opět pro symetrické geometrické uspořádání ale s napájením pouze pravého motoru – levý není napájen. V tomto případě se robot otáčí a levé kolo vykonává při rozjezdu (díky dynamickým vlastnostem) poměrně složitý pohyb – viz detail dráhy levého kola a ča-

sový průběh otáček a proudu levého nenapájeného motoru za prvních 20 s rozjezdu z nulové rychlosti v doplňujících grafech.

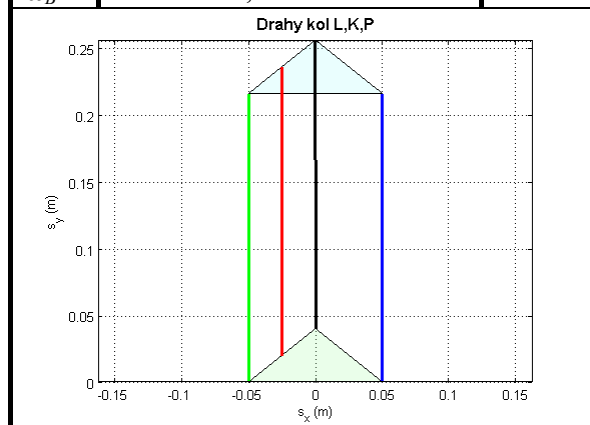
Tabulka 3a: USTÁLENÝ STAV A

	<i>levé kolo</i>	<i>pravé kolo</i>	
$U$	1,000	1,000	V
$L$	<b>0,050</b>	<b>0,050</b>	m
$I$	0,13514	0,13514	A
$\omega$	1,07534	1,07534	Hz
$M$	1,351e-06	1,351e-06	N.m
$v_B$	0,01351		m.s <sup>-1</sup>
$\omega_B$	-1,732e-20		Hz



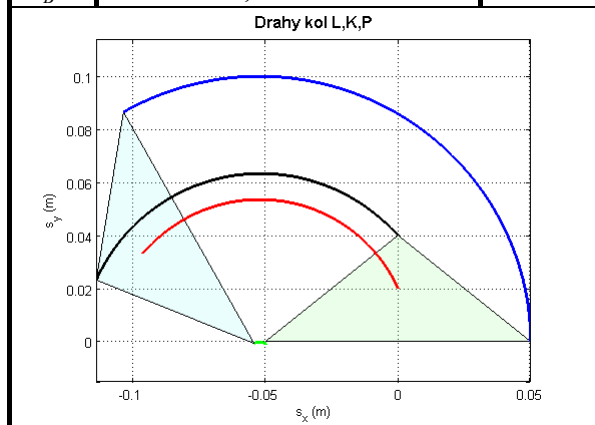
Tabulka 3b: USTÁLENÝ STAV B

	<i>levé kolo</i>	<i>pravé kolo</i>	
$U$	1,000	1,000	V
$l$	<b>0,025</b>	<b>0,075</b>	m
$i$	0,13515	0,13514	A
$\omega$	1,07532	1,07535	Hz
$M$	1,937e-06	7,660e-07	N.m
$v_B$	0,01351		m.s <sup>-1</sup>
$\omega_B$	5,323e-07		Hz

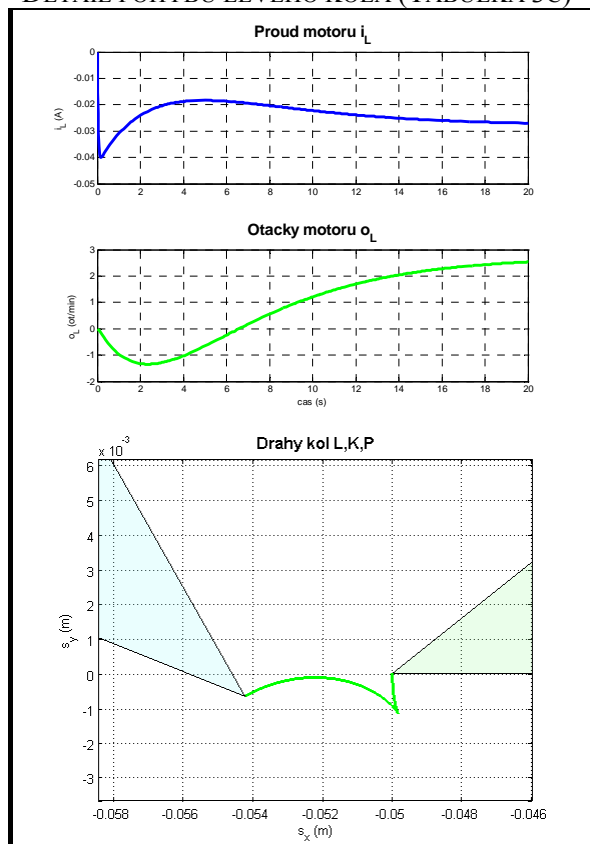


Tabulka 3c: USTÁLENÝ STAV C

	<i>levé kolo</i>	<i>pravé kolo</i>	
$U$	<b>0,000</b>	<b>1,000</b>	V
$L$	0,050	0,050	m
$I$	-0,02772	0,16287	A
$\omega$	0,04523	1,03010	Hz
$M$	-3,341e-03	3,342e-03	N.m
$v_B$	0,00676		m.s <sup>-1</sup>
$\omega_B$	1,970e-02		Hz



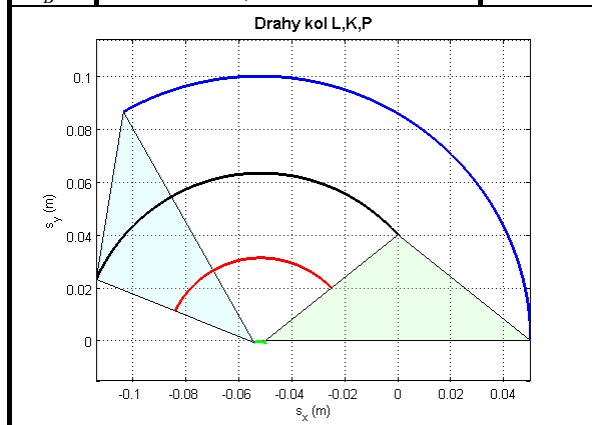
DETAIL POHYBU LEVÉHO KOLA (TABULKA 3C)



Ustálený stav D a E odpovídají situaci, kdy je napájen pouze pravý motor. Stav D odpovídá posunu těžiště k levému a stav E pravému kolu. Oba stavy mají dokumentovat vliv polohy těžiště. Opět jsou doplněny pro lepší představu dráhy robotu pro prvních 20 s od startu z nulové rychlosti a pro možnost přímého porovnání s předchozím stavem C jsou zvoleny takové podmínky, aby robot vždy zatačel z výchozí polohy doleva.

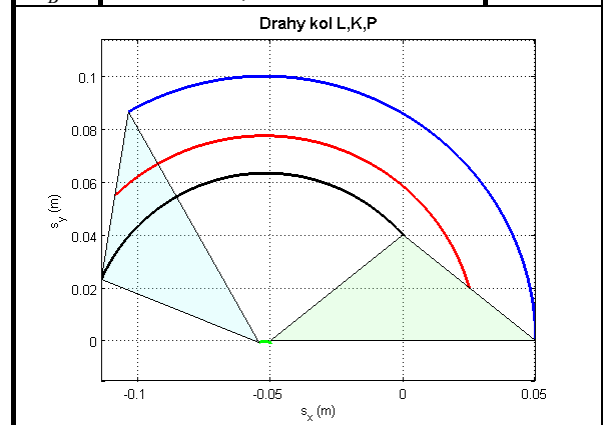
Tabulka 3d: USTÁLENÝ STAV D

	<i>levé kolo</i>	<i>pravé kolo</i>	
$U$	0,000	1,000	V
$l$	<b>0,025</b>	<b>0,075</b>	m
$i$	-0,02773	0,16287	A
$\omega$	0,04524	1,03011	Hz
$M$	-3,341e-03	3,342e-03	N.m
$v_B$	0,00366		m.s <sup>-1</sup>
$\omega_B$	1,970e-02		Hz



Tabulka 3e: USTÁLENÝ STAV E

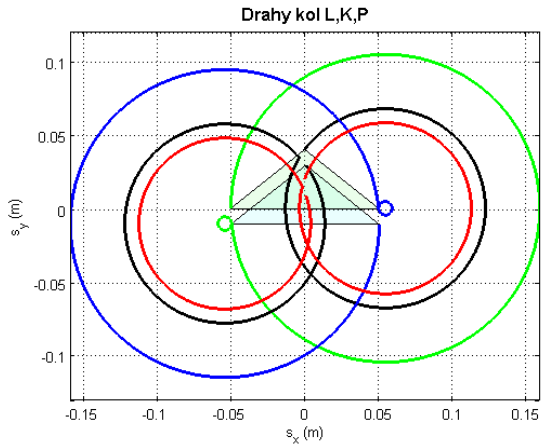
	<i>levé kolo</i>	<i>pravé kolo</i>	
$U$	0,000	1,000	V
$l$	<b>0,075</b>	<b>0,025</b>	m
$i$	-0,02773	0,16287	A
$\omega$	0,04524	1,03009	Hz
$M$	-3,341e-03	3,343e-03	N.m
$v_B$	0,00985		m.s <sup>-1</sup>
$\omega_B$	1,970e-002		Hz



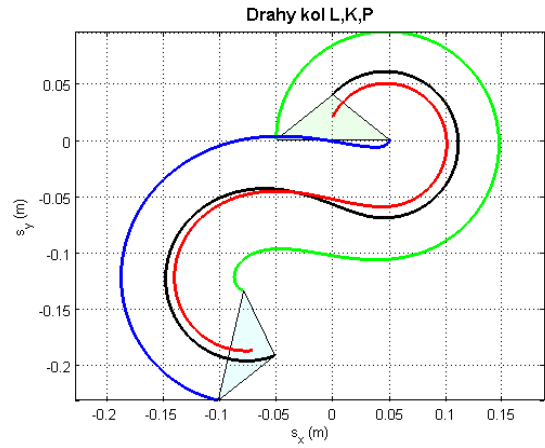
### 3.2 Dynamické vlastnosti modelu

Zatímco z výpočtu ustáleného pohybu robotu lze učinit závěry, že výsledky modelu ve vybraných situacích odpovídají či neodpovídají reálnému chování robotu, dělat závěry z výpočtů dynamického chování je podstatně obtížnější. Dynamické chování je, kromě parametrů ovlivňujících ustálený stav, ovlivněno dalšími obtížně zjistitelnými parametry (momenty setrvačnosti motorů včetně převodovek a moment setrvačnosti otáčení robotu okolo těžiště). Použité hodnoty těchto parametrů jsou opět velmi hrubě odhadnuty. Systém popisující dynamické chování robotu je čtvrtého řádu a jeho časové konstanty (pro parametry dle Tabulky 3a) jsou -0,0209, -0,0251, -3,1330 a -4,0402. Je vidět, že jde o dvě dvojice časových konstant lišících se o dva řády, což odpovídá rychlé dynamice motorů (proud a otáčky) a pomalé dynamice mechaniky vozíku (posuvná a otáčivá rychlost).

Pro ilustraci vlivu koeficientů  $J$ ,  $J_T$  ovlivňujících dynamiku mechanických částí jsou uvedeny dráhy robotu pro situaci, že oba zmíněné koeficienty jsou nulové (Obrázek 8) a hodnoty koeficientů podle Tabulky 1 a 2 (Obrázek 9). V obou případech jsou motory střídavě napájeny 5 V po dobu 20 s, nejprve 10 s levý motor a pak 10 s pravý motor.

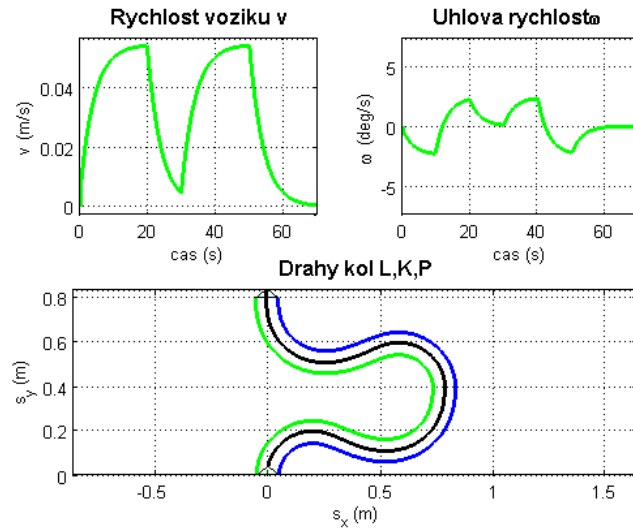


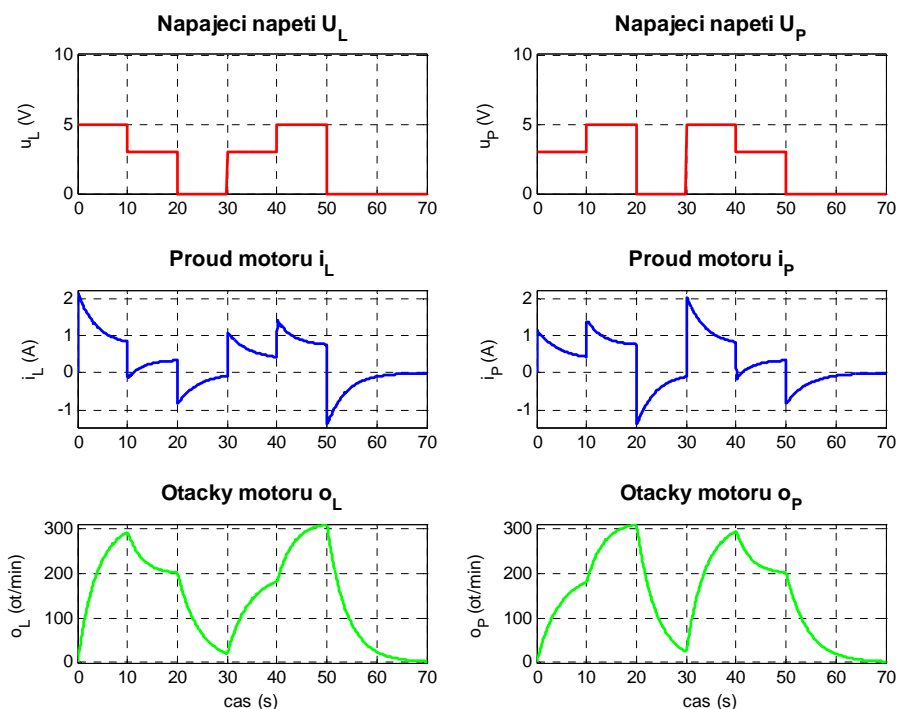
Obrázek 8 Draha bez dynamiky mechanické části



Obrázek 9 Draha s dynamikou mechanické části

Dynamické chování modelu ukážeme na situaci, kdy na levý i pravý motor přivedeme různé posloupnosti změn napětí (viz Obrázek 10). Pak napájení vypneme a opět přivedeme stejné posloupnosti napájecího napětí ale obráceně tj. původní sekvence změn napětí pro pravý motor bude přivedena na levý motor a obráceně. V případě symetrického umístění těžiště by se robot měl srovnat do původního směru.





Obrázek 10 Dynamické chování robotu

## 4 Závěr

Uvedený matematický model pohybu mobilního diferenciálně řízeného robotu se liší od standardního popisu zejména tím, že nevychází ze známých rychlostí hnacích kol, ale uvažuje vzájemné dynamické ovlivňování motorů a podvozku. Tento přístup, kde vstupní veličinou je napájecí napětí motorů je nutný v případě, že chceme model využít pro návrh složitějšího řízení. Standardní odometrický model umožňuje převést požadovanou dráhu na požadované obvodové rychlosti hnacích kol, ale nedává žádné informace ani o souvislosti mezi napájecím napětím motorů a otáčkami kol ani o dynamice elektrické a mechanické části.

Model též ukázal, že sice poloha těžiště ovlivňuje výsledné chování ale jen v minimální míře. Nicméně odvození modelu s obecnou polohou těžiště dovoluje rozšíření na popis dvoukolového robotu (bez podpůrného kola). Takový robot je nestabilní a vyžaduje aktivní regulaci, aby se udržel ve vzpřímené poloze. Matematický model takového robotu popisující polohu vybraného bodu v prostoru umožní návrh vícerozměrného řízení pohybu robotu včetně jeho stabilizace.

Problémem zůstává, zda odvozený dynamický model bude dostačující aproximací reálného chování pro potřeby návrhu řízení. V modelu je použita jen velmi hrubá aproximace mechanických ztrát úměrných rychlostem, která ale umožnila, aby dynamická část modelu zůstala lineární.

## References

- [1] DUŠEK, F.; HONC, D. ; ROZSÍVAL, P. *Mathematical model of differentially steered mobile robot*. In Proceedings of the 18th International Conference on Process Control, Tatranská Lomnica, 14.–17.6.2011, Bratislava : STU Bratislava, 2011, s. 221-229, ISBN 978-80-227-3517-9
- [2] Stengel, Robert F., *Robotics and Intelligent Systems; A Virtual textbook*; <http://www.princeton.edu/~stengel/RISVirText.html> [citováno 31.8.2011]
- [3] Lucas, G. W., *A Tutorial and Elementary Trajectory Model for the Differential Steering System of Robot Wheel Actuators*; <http://rossum.sourceforge.net/papers/DiffSteer/DiffSteer.html> [citováno 31.8.2011]
- [4] Winkler, Zbyněk, *Odometrie*; <http://robotika.cz/guide/odometry/cs> [citováno 31.8.2011]
- [5] Wikipedia, *Odometry*; <http://en.wikipedia.org/wiki/Odometry> [citováno 31.8.2011]
- [6] Horák, Z.; Krupka, F., *Fyzika*, svazek 1. SNTL Praha, 1976, 422 s.



---

doc. Ing. František Dušek, CSc. [frantisek.dusek@upce.cz](mailto:frantisek.dusek@upce.cz)  
Ing. Daniel Honc, Ph.D. [daniel.honc@upce.cz](mailto:daniel.honc@upce.cz)  
doc. Ing. Josef Kotyk, CSc. [josef.kotyk@upce.cz](mailto:josef.kotyk@upce.cz)

KŘP FEI Univerzita Pardubice, nám. Čs. legií 565, 53210 Pardubice